



# PHY593 : Rapport de stage

## Caractérisation électroacoustique de nouveaux prototypes de hauts-parleurs

Jean-Marie Lemerrier

sous la direction de MM. Jérôme Malbrel et Thomas Hélie

Septembre 2019

PA Electrical Engineering

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Sujet	4
1.1.1	Enoncé et objectifs	4
1.1.2	Intérêts et enjeux	4
1.2	Cadre de travail	4
<b>2</b>	<b>Eléments théoriques de physique du haut-parleur et de traitement du signal</b>	<b>5</b>
2.1	Modélisation et physique du haut-parleur	5
2.1.1	Fonctionnement simplifié et éléments physiques mis en jeu	5
2.1.2	Approximation linéaire et paramètres de Thiele-Small	6
2.1.3	Non-linéarités et raffinements du modèle	7
2.1.4	Effet des non-linéarités sur le contenu spectral	8
2.2	Séries de Volterra pour les systèmes entrée-sortie	9
2.2.1	Formalisme	9
2.2.2	Un exemple : l'oscillateur de Duffing	12
2.3	Méthodes de séparation en ordres homogènes [1]	14
2.3.1	Motivation	14
2.3.2	Méthode AS [Amplitude-based Separation]	14
2.3.3	Méthode CPS [Complex-valued Phase-based Separation]	14
2.3.4	Méthode PAS [Phase- and Amplitude-based Separation]	15
<b>3</b>	<b>Application de la séparation en ordres homogènes pour l'identification de paramètres</b>	<b>17</b>
3.1	Motivation	17
3.2	Modèle retenu pour l'identification des paramètres	17
3.3	Extraction de la partie linéaire et validation	19
3.4	Identification de paramètres linéaires de Thiele-Small	22
3.5	Estimation des contributions non linéaires	23
3.5.1	Présentation de la méthode	23
3.5.2	Résultats et discussion	24
3.6	Eléments complémentaires et discussion	30
<b>4</b>	<b>Séparation en ordres homophases et caractérisation de contenu harmonique</b>	<b>32</b>
4.1	Distorsion d'un système non linéaire : harmoniques et signaux homophases	32
4.1.1	Signaux homophases : définition	32
4.1.2	Liens entre signaux homophases et harmoniques	34
4.2	Méthode HPS [Homophase Phase-based Separation]	36
4.2.1	Présentation de la méthode	36
4.2.2	Résultats sur système simulé	37
4.3	Calcul de distorsion harmonique et visualisations	39
4.4	Résultats	41
4.4.1	Résultats sur système simulé	41
4.4.2	Résultats expérimentaux sur haut-parleur de référence et sur prototypes	41
4.4.3	Comparaisons et discussion	41
<b>5</b>	<b>Contributions et conclusion générale</b>	<b>44</b>
5.1	Réponse aux objectifs	44
5.2	Remarques générales sur le haut-parleur <i>Vertex</i>	44
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>48</b>

## Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon collègue et compère Rémi Flachet, stagiaire sur cette collaboration Voxline-Ircam, dont le sens de l'humour à toutes épreuves et l'énergie débordante ont permis de passer cette période de stage dans une ambiance détendue mais entraînante, tout en me posant par moments des questions quant à ma propre santé mentale.

Mille mercis ensuite à Jérôme Malbrel et toute l'équipe de Voxline : Frédéric, Jones et Bruno, pour leur volonté généreuse de faire découvrir le projet, leurs idées fusantes et l'accueil remarquable qu'ils nous ont réservé, Rémi et moi, à la maison Voxline : *"construire une enceinte sur un coin de table de cuisine, ça donne des résultats pas mal hein ?"*.

Du côté Ircam cette fois, ce sont tous les membres de l'équipe S3AM dont je tiens à souligner l'esprit de collaboration, d'entraide et l'expertise dans le domaine de la recherche. Thomas Hélié d'abord, avec son sens du détail, la justesse de ses explications et surtout son travail sans relâche pour la recherche académique et sa sincère volonté de valoriser les hommes et femmes qui y oeuvrent, j'ai trouvé un exemple. Les doctorants de l'équipe ensuite : Tristan Lebrun (courage pour la dernière ligne droite, je te souhaite tout le meilleur pour la suite de tes aventures), Victor Wetzel (quelle ambiance dans ce bureau, quelle énergie !) et Marc Wijnand (qui est sûrement en train de courir par les vallons belges à l'heure où sont rédigés ces remerciements). Tous les autres membres de l'équipe qui y insufflent un esprit fabuleux : David Roze, Robert Piéchaud, Djelal Chalabi, Henri Boutin, Quentin Lamerand, René Caussé, Joël Bensoam... Surtout, un grand merci et bravo à Damien Bouvier, alumnus de l'équipe, dont j'ai pu étudier les remarquables travaux de thèse.

Je terminerai ces remerciements par l'équipe de l'Unité Mécanique de l'Ensta ParisTech qui nous a accueilli et accompagné lors de nos mesures par vibrométrie : Benjamin Cotté et Emile Garnell (camarade de l'Ecole, bon courage pour la continuation de cette thèse qui a l'air passionnante).

## Notations

- $\mathbb{T}$  : intervalle temporel, partie de la droite réelle
- $\mathbb{F}$  : intervalle fréquentiel, partie de la droite réelle
- $j\mathbb{F}$  : intervalle du domaine de Laplace associé à  $\mathbb{F}$
- $\mathcal{F}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  : ensemble des fonctions d'un ensemble  $\mathbb{A}$  à valeurs dans un ensemble  $\mathbb{B}$
- $C^k(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  : ensemble des fonctions de classe de régularité  $C^k$  appartenant à  $\mathcal{F}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$
- $1_{\mathbb{A}}$  : fonction constante égale à 1 sur l'ensemble  $\mathbb{A}$
- $1_{\mathbb{B}}$  : fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$
- $\mathcal{TF}[h]$  : transformée de Fourier de la fonction  $h \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{Y})$ .

# 1 Introduction

## 1.1 Sujet

### 1.1.1 Enoncé et objectifs

La société Voxline a récemment développé de nouveaux prototypes de haut-parleurs électrodynamiques : un dispositif dédié aux basses fréquences [*Note : que l'on désignera par P*] et un dispositif dédié aux médium et aigus [*Note : Vertex que l'on désignera par V*].

Ce stage porte sur la caractérisation d'un nombre réduit d'exemplaires d'intérêt, corpus qui sera fourni par la société.

Plusieurs aspects seront abordés.

**En premier lieu**, on s'intéressera à vérifier la linéarité des systèmes, entre la tension d'excitation et plusieurs types de sorties mesurées :

- électrique : courant
- mécanique : position, vitesse (d'un point)
- acoustique : champ de pression rayonné (en un point)

A cet effet, on s'appuiera sur une méthode développée au laboratoire STMS (dans la thèse de Damien Bouvier, 2018 [1]) qui permet d'extraire des signaux mesurés, les contributions linéaires et non linéaires du système. Cette méthode a déjà pu montrer son intérêt dans un cadre expérimental sur le cas d'un haut-parleur électrodynamique classique.

**Dans un second temps**, on caractérisera la directivité des dispositifs, en se concentrant sur le plan médian.

**Enfin**, on s'intéressera à une modélisation de haut-parleur, d'abord simplifiée (par exemple, de type Thiele/Small), dont on cherchera à estimer les paramètres, vérifier le domaine de validité, et proposer des extensions et améliorations.

### 1.1.2 Intérêts et enjeux

Les enjeux levés par le sujet du stage sont doubles : pour Voxline, ils sont d'obtenir à la fois une caractérisation qui permet d'améliorer la compréhension du système en conception et de prendre en compte les phénomènes soulevés pour modifier les axes de développement, et d'obtenir un produit fini de fiche constructeur qu'ils puissent communiquer ou mettre en avant à l'instar d'un constructeur industriel standard.

Pour l'Ircam il est également intéressant de progresser sur la compréhension et l'application des travaux de thèse de Damien Bouvier [1], puisque l'on s'appuie sur ces travaux pour proposer une identification de paramètres sur réponse linéarisée du système en section 3, et une estimation de contenu harmonique en section 4. Le calcul proposé en section 4 serait également intéressant en lui-même puisqu'il étendrait les possibilités de caractérisation harmonique à une large variété de signaux test.

## 1.2 Cadre de travail

Un poste de travail m'était alloué au sein de l'équipe S3AM à l'Ircam, afin de poursuivre mes travaux expérimentaux, à l'aide notamment d'un matériel idéal : chambre anéchoïque, banc d'acquisition, capteurs, hauts-parleurs... L'environnement de l'équipe et de l'institut est également remarquable puisqu'il permet d'échanger sur les travaux en cours, de débloquer des situations avec des doctorants et chercheurs expérimentés, et d'acquérir des éléments de culture importants dans l'appréhension des problèmes du monde de l'audio et du signal, au travers de conférences, de colloques et de prestations organisées au sein de l'Ircam.

Je passais également une partie de la semaine dans les locaux de la société Voxline, afin de communiquer sur les résultats des expérimentations et de la recherche, de comprendre et d'observer la conception des hauts-parleurs et de l'électronique associée, et d'échanger sur les travaux à effectuer (axes de développement, campagnes de mesures à organiser au sein de l'Ircam, contacts extérieurs à envisager).

## 2 Éléments théoriques de physique du haut-parleur et de traitement du signal

On présentera dans cette section les bases de la modélisation du haut-parleur, et on développera les éléments de la théorie du traitement de signal afin d'aborder les outils exploités lors du stage : le formalisme des séries de Volterra et les méthodes de séparation d'ordres.

### 2.1 Modélisation et physique du haut-parleur

#### 2.1.1 Fonctionnement simplifié et éléments physiques mis en jeu

Le haut-parleur électrodynamique est un transducteur, qui convertit un signal de tension d'entrée en un déplacement de membrane en sortie, excitant alors la masse d'air (charge acoustique) pour donner naissance à un champ rayonné de pression.

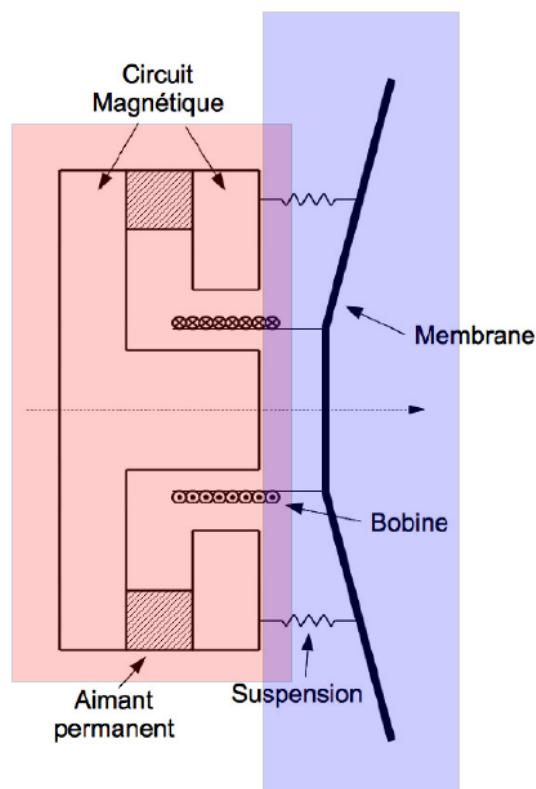


Figure 2.1: Représentation schématique d'un haut-parleur électrodynamique classique

Le fonctionnement est assuré par les éléments présentés sur le schéma 2.1, à savoir :

- Une bobine dont les pattes sont reliées au générateur du signal d'excitation d'une part, et fixée à la membrane d'autre part sur sa partie centrale appelée cône
- Un aimant permanent créant un champ magnétique fixe
- Un circuit magnétique composé de matériau ferromagnétique permettant de canaliser les lignes de champ magnétique
- Une suspension liant la membrane au bâti
- La membrane liée à la bobine d'une part, et à la suspension d'autre part

Un signal d'excitation, sous la forme d'un courant alternatif, parcourt la bobine qui, plongée dans le champ magnétique de l'aimant permanent, est mue par la force de Laplace. Par la liaison directe, le

mouvement va être transmis à tout l'équipage mobile composé de la bobine et de la membrane en liaison visco-élastique avec le bâti *via* la suspension. Le déplacement (ou plus justement l'accélération) de la membrane meut la masse d'air dans le champ proche, appelée charge acoustique. Ce mouvement induit des variations de pression donc un champ rayonné de pression, dans le champ proche comme dans le champ lointain.

Ainsi, l'étude du haut-parleur relève d'une approche multiphysique impliquant une étude électrocinétique, électromagnétique, dynamique et enfin acoustique. Les mesurables sur lesquelles on s'appuie afin de caractériser un tel transducteur seront donc principalement le tension et la courant dans la bobine, le déplacement de la membrane et le champ de pression.

### 2.1.2 Approximation linéaire et paramètres de Thiele-Small

La modélisation du haut-parleur électrodynamique passe par une première phase de simplification en l'hypothèse d'un comportement linéaire en la tension d'excitation, donnant naissance à un premier modèle linéaire, piloté par des paramètres dits **de Thiele/Small**, d'après les scientifique et ingénieur audio Richard H. Small et Albert Neville Thiele, qui ont posé les bases de l'étude objective de caractérisation du haut-parleur, de l'électronique d'amplification et des baffles au cours du  $XX^e$  siècle.

Le modèle consiste en une décomposition électrique | mécanique liée par le biais d'un couplage électromagnétique représentant l'action de la force de Laplace. Un schéma électrique équivalent est donné en figure 2.2.

**Remarque 2.1.** : Les éléments sont placés en série dans le circuit car la représentation choisie est celle de composants électriques, cependant on trouve dans plusieurs ouvrages une représentation en parallèle pour la partie mécanique respectant l'analogie électromécanique

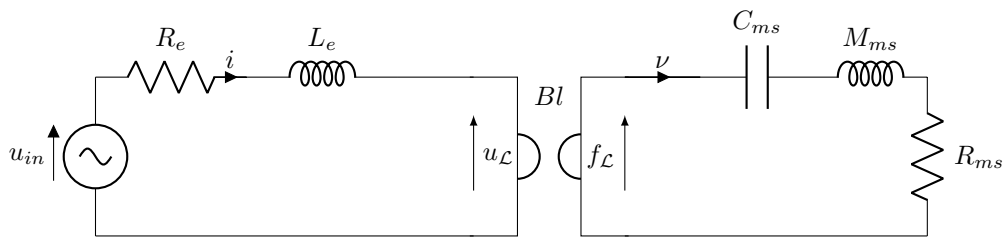


Figure 2.2: Schéma électrique équivalent du modèle linéaire de haut-parleur

Les paramètres de Thiele/Small sont les suivants :

#### Partie électromagnétique

- $R_e$  : Résistance électrique de la bobine
- $L_e$  : Coefficient d'auto-inductance de la bobine. On considère donc que la physique d'induction est celle d'une simple bobine, donc que l'impédance du composant est approximée par :

$$Z(j\omega) \approx jL\omega$$

- $Bl$  : Coefficient de couplage électromagnétique caractérisant la force de Laplace. Il provient de l'approximation linéaire de l'expression de la Force de Laplace intégrée sur le contour  $\mathcal{C}$  des spires parcourues par le courant  $i$  :

$$f_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{C}} B i dl \approx Bl i$$

Dans cette expression, on a donc négligé la dépendance du champ efficace  $B$  due normalement au changement de géométrie de  $\mathcal{C}$  imposé par le déplacement de la membrane, ainsi que la modification du champ permanent par l'induction due au courant  $i$ . On obtient donc une force de Laplace linéaire en le courant  $i$

## Partie mécanique

- $C_{ms} = \frac{1}{K_{ms}}$  : Compliance ou souplesse de la suspension, inverse de sa raideur. Ce coefficient provient de l'approximation d'une force de suspension linéaire en le déplacement de la membrane :

$$f_{susp}(q) \approx K_{ms}q$$

- $M_{ms}$  : Masse mobile de la membrane
- $R_{ms}$  : Résistance mécanique de la suspension ou coefficient d'amortissement. On considère également une approximation où l'amortissement dépend linéairement de la vitesse la membrane :

$$f_{damp}\left(\frac{dq}{dt}\right) \approx R_{ms} \frac{dq}{dt}$$

On retrouve donc ces paramètres dans les équations caractéristiques couplées décrivant le régime de notre haut-parleur simplifié :

$$\text{Loi des mailles : } u_{in} = R_e i + L_e \frac{di}{dt} + Bl \frac{dq}{dt} \quad (2.1)$$

$$\text{Principe Fondamental de la Dynamique : } M_{ms} \frac{d^2q}{dt^2} + R_{ms} \frac{dq}{dt} + K_{ms}q = Bl i \quad (2.2)$$

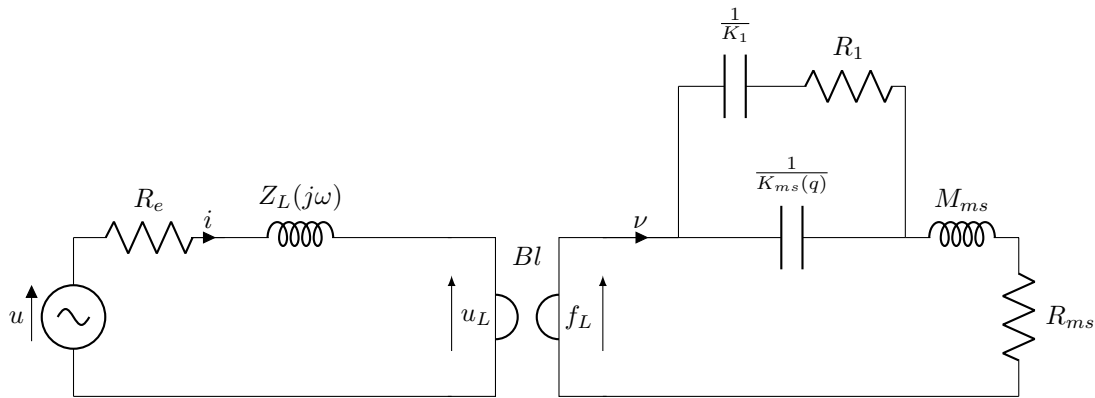
### 2.1.3 Non-linéarités et raffinements du modèle

La pratique usuelle pour les constructeurs industriels est de communiquer les paramètres précédents (ou d'autres paramètres intermédiaires) dans leur *datasheet*, en utilisant ce modèle d'équations linéarisées pour l'identification des paramètres. En réalité, la physique du haut-parleur est bien plus complexe puisque sujette à de nombreux phénomènes linéaires et nonlinéaires. Répertoriés dans [5], on en cite ici une partie, dans l'ordre (approximatif : voir [9] et [8]) du plus prépondérant au plus négligeable :

- L'influence nonlinéaire du changement de géométrie du au déplacement de la membrane sur le couplage électromagnétique :  $Bl = Bl(q)$
- La dépendance asymétrique en déplacement de l'inductance de la bobine :  $L_e = L_e(q)$  modélisée par un polynôme d'ordre 1 en  $x$  à coefficient constant non-nul dans [8]
- La dépendance nonlinéaire en courant de l'inductance de la bobine :  $L_e = L_e(i)$  modélisée par une expression polynômiale d'ordre 2 en  $i$  dans [8]
- La raideur nonlinéaire de suspension  $f_{susp}(q)$ , que l'on approxime souvent par une expression polynômiale d'ordre 3 en  $q$
- L'effet *creep* : un phénomène linéaire à mémoire longue gouvernant le comportement viscoélastique de la suspension dans les basses fréquences.
- La modification du flux magnétique circulant dans le circuit magnétique par la bobine agissant comme un électro-aimant:  $Bl = Bl(\phi)$
- La saturation ferromagnétique due au matériau du circuit magnétique, induisant une non-linéarité sur la loi d'induction  $i = f(\phi)$
- L'induction de courant de fuite dits *Eddy-current losses* dans le matériau du circuit magnétique provoquant une dissipation d'énergie par effet Joule (donc l'ajout d'une résistance  $R_l$  en parallèle de l'inductance  $L_e$ ), la création d'un nouveau champ magnétique et une contre-induction par loi de Len.

Tous ces phénomènes mènent à de nouvelles modélisations plus complexes, par exemple dans [5], un des modèles prend en compte l'effet *creep* en ajoutant une cellule visco-élastique en parallèle de la branche mécanique du système, et une suspension raide  $K_{ms}(q)$ , aboutissant à un schéma électrique équivalent

2.3.



$\mathcal{AL}$

Figure 2.3: Schéma électrique équivalent du modèle de Thiele-Small prenant en compte l'effet *creep* et une suspension raide dans [5]

#### 2.1.4 Effet des non-linéarités sur le contenu spectral

L'introduction de phénomènes non-linéaires s'accompagne d'une création d'harmoniques, et complexifie donc le spectre de Fourier de la réponse du système. On distingue deux phénomènes qui sont d'une part la **distorsion harmonique**, et l'**intermodulation** d'autre part. Ces phénomènes sont seulement décrits ici mais on pourra les quantifier en 4 à l'aide du formalisme introduit en 2.2.1).

La **distorsion harmonique** consiste en la chose suivante : pour chaque fréquence du signal d'excitation sont créées des harmoniques aux multiples de la fréquence mentionnée et selon le respect de la parité suivant :

- Si le système étudié comporte une non-linéarité d'ordre impair  $2n + 1$  en l'état ou en l'entrée, alors le spectre de la réponse observée comportera des harmoniques d'ordre impair  $\{2p + 1, \forall p \in \mathbb{N}\}$
- Si le système étudié comporte une non-linéarité d'ordre pair  $2n$  en l'état ou en l'entrée, alors le spectre de la réponse observée comportera des harmoniques d'ordre pair  $\{2p, \forall p \in \mathbb{N}\}$

L' **intermodulation** est un phénomène qui rentre en compte lorsque le spectre du signal d'entrée comporte au moins 2 fréquences différentes : dans ce cas, des harmoniques sont créées, dont la fréquence est une combinaison linéaire des différentes fréquences présentes dans le signal d'entrée.

Dans le cas simpliste d'un signal d'entrée composé de deux sinusoïdes de fréquences  $(f_1, f_2) \in \mathbb{F}^2$ , le spectre de la réponse d'un système comportant une non-linéarité d'ordre  $n$  comportera les fréquences  $\{pf_1 \pm qf_2, (p, q) \in \mathbb{N}^*, p + q = n\}$ . Dans le cas général, cette combinaison est effectuée avec toutes les fréquences présentes dans le spectre du signal d'entrée, et pour tous les ordres de non-linéarité présents dans les lois du système.



## 2.2 Séries de Volterra pour les systèmes entrée-sortie

### Motivation

Pour identifier des paramètres de Thiele-Small sur un modèle linéarisé, on peut se contenter d'effectuer un *curve-fitting* sur les fonctions de transfert issues des mesures, comme on détaillera dans 3. Cependant, l'étude de systèmes nonlinéaires nécessite l'élargissement du cadre d'étude, les fonctions de transfert n'étant définissables que pour des équations différentielles ordinaires linéaires. On introduit dans cette section un cadre d'étude, celui des systèmes dynamiques à loi entrée-sortie et un formalisme pour résoudre les équations de tels systèmes : les séries de Volterra.

### 2.2.1 Formalisme

#### Systèmes dynamiques à représentation d'état

On figure l'évolution de systèmes dynamiques par un système à représentation d'état, où l'on définit par :

- $x(t)$  l'état du système, un vecteur comprenant les grandeurs décrivant notre système à un instant donné.

*Exemple* : Pour le système haut-parleur linéarisé décrit en 2.2, notre vecteur d'état serait  $x(t) = [i(t), x(t), \frac{dx}{dt}(t)]^T$

- $u(t)$  le vecteur d'entrées du système à l'instant donné

*Exemple* : Pour le même système, l'entrée serait  $u(t) = u_{in}(t)$

- $y(t)$  le vecteur de sorties choisies du système à l'instant donné

*Exemple* : Pour le même système, on peut choisir n'importe quelle sortie, par exemple  $y(t) = [i(t), x(t)]^T$

Les équations qui gouvernent l'évolution de notre système sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Equation dynamique : } \partial_t x(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \text{Loi entrée-sortie : } y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions analytiques, choisies nulles en  $(0, 0)$  (sans perdre de généralité, on place notre point d'équilibre en  $(0, 0)$ , et donc exprimables sous la forme :

$$f(x, u) = \sum_{[p,q] \in \mathbb{N}^2 / \{0,0\}} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial u^q} [\mathbf{o}, \mathbf{o}] (x, \dots, x, u, \dots, u) = \sum_{[p,q] \in \mathbb{N}^2 / \{0,0\}} \mathcal{M}_{p,q} (x, \dots, x, u, \dots, u) \quad (2.3)$$

$$g(x, u) = \sum_{[p,q] \in \mathbb{N}^2 / \{0,0\}} \frac{\partial^{p+q} g}{\partial x^p \partial u^q} [\mathbf{o}, \mathbf{o}] (x, \dots, x, u, \dots, u) = \sum_{[p,q] \in \mathbb{N}^2 / \{0,0\}} \mathcal{N}_{p,q} (x, \dots, x, u, \dots, u) \quad (2.4)$$

On notera :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{p,q} = \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial u^q} [\mathbf{o}, \mathbf{o}] & \text{la dérivée de Fréchet d'ordre } (p, q) \text{ de } f \text{ en } [\mathbf{o}, \mathbf{o}] \\ \mathcal{N}_{p,q} = \frac{\partial^{p+q} g}{\partial x^p \partial u^q} [\mathbf{o}, \mathbf{o}] & \text{la dérivée de Fréchet d'ordre } (p, q) \text{ de } g \text{ en } [\mathbf{o}, \mathbf{o}] \\ Ax = \mathcal{M}_{1,0}(x) & \text{la partie linéaire en } x \text{ de } f \text{ au point } [0, 0] \\ Bu = \mathcal{M}_{0,1}(u) & \text{la partie linéaire en } u \text{ de } f \text{ au point } [0, 0] \\ Cx = \mathcal{N}_{1,0}(x) & \text{la partie linéaire en } x \text{ de } g \text{ au point } [0, 0] \\ Du = \mathcal{N}_{0,1}(u) & \text{la partie linéaire en } u \text{ de } g \text{ au point } [0, 0] \end{array} \right.$$

Ainsi, on peut réécrire les équations du système en :

$$\text{Equation dynamique : } \partial_t x(t) = Ax(t) + Bx(t) + \sum_{\substack{[p,q] \in \mathbb{N}^2 \\ 2 \leq p+q}} \mathcal{M}_{p,q}(x, \dots, x, u, \dots, u)(t) \quad (2.5)$$

$$\text{Loi entrée-sortie : } y(t) = Cx(t) + Du(t) + \sum_{\substack{[p,q] \in \mathbb{N}^2 \\ 2 \leq p+q}} \mathcal{N}_{p,q}(x, \dots, x, u, \dots, u)(t) \quad (2.6)$$

### Méthode des perturbations régulières

Une méthode pour résoudre un tel système largement utilisée est celle dite "des perturbations régulières" : On marque l'entrée par un facteur homothétique  $\epsilon$  :  $u(t) = \epsilon v(t)$  et on recherche l'état et la sortie sous la forme de séries entières en  $\epsilon$  :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \epsilon^n x_n(t) \quad y(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \epsilon^n y_n(t)$$

Comme explicité dans [3], une telle forme de solution est formellement possible si elle satisfait le système suivant d'équations 2.2.1 à chaque ordre et que la solution ne se réduit pas à  $\epsilon = 0$ . Le système est dans ce cas classifiable comme *faiblement nonlinéaire*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{T} : \partial_t x_n(t) = Ax_n(t) + r_n(t) \\ r_n(t) = \sum_{\substack{[p,q] \in \mathbb{N}^2 \\ 2 \leq p+q \leq n}} \mathbb{1}_{p \geq 1} \left[ \sum_{\substack{m \in (\mathbb{N}^*)^p \\ m_1 + \dots + m_p = n-q}} \mathcal{M}_{p,q}(x_{m_1}, \dots, x_{m_p}, u, \dots, u)(t) \right] + \mathcal{M}_{0,n}(u, \dots, u)(t) \end{array} \right.$$

On obtient alors naturellement des expressions récurrentes puisque les  $r_n$  ne contiennent que des ordres  $x_{m < n}$  et ainsi, on résoud un problème de Cauchy linéaire à l'ordre  $n$  avec conditions initiales nulles :

$$x_n(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{A\tau} r_n(t - \tau) d\tau \quad (2.7)$$

En sommant sur  $n \in \mathbb{N}$  on obtient alors une expression close de  $x(t)$  (et de  $y(t)$  en remplaçant dans le système initial):

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{T}^n} h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\underline{\tau} \\ y(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{T}^n} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\underline{\tau} \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.** On note par  $d\underline{\tau}$  le produit  $\prod_{i=1}^n d\tau_i$

### Séries de Volterra

Les fonctions  $\{k_n \text{ et } h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  ( $t, \tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}^n$ ) ainsi introduits sont les **noyaux de Volterra**, qui généralisent la notion de filtre linéaire. Dans le cadre de notre étude, on considèrera des

systèmes **causaux**, dont l'état et la sortie sont nuls avant l'instant défini comme initial  $t = 0$ . On obtient alors l'expression de convolution multiple suivante pour l'état  $x$ , et similairement pour la sortie  $y$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\mathcal{I} \\ y(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+^n} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\mathcal{I} \end{aligned}$$

**Definition 2.1.** La série de Volterra  $V[\cdot](t)$  du système entrée-sortie est l'opérateur reliant la sortie (ou l'état) à l'entrée à un instant donné selon  $y(t) = V[u](t)$ , donc :

$$\begin{aligned} V[u](t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} V_n[u, \dots, u](t) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+^n} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\mathcal{I} \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.** : L'opérateur de Volterra de rang  $n$   $V_n[u, \dots, u](t)$  est une fonction  $n$ -linéaire de l'entrée  $u$

Dans la pratique, on tronquera les séries de Volterra à un certain ordre noté dans par la suite  $N$  et on appellera *série de Volterra de degré  $N$*  la série  $\tilde{V}[u](t) = \sum_{n=1}^N V_n[u, \dots, u](t)$ , ce qui engendre des approximations puisque tous les ordres de non-linéarité ne sont pas pris en compte, ainsi qu'un phénomène de "repliement d'ordre" lors de l'utilisation de méthodes de séparation (cf 2.6). Cependant cela rend possible les méthodes de calcul numérique matriciel d'ordre fini, notamment la Transformée Discrète de Fourier [TFD] (voir 2.3)

Les systèmes représentables en séries de Volterra englobent une vaste classe de systèmes physiques tels que les systèmes dont la loi entrée-sortie est (i) linéaire, (ii) développable en série entière, et (iii) les systèmes composés de cascades, somme, produits des systèmes mentionnés ci-avant. Les calculs de noyaux de Volterra de tels systèmes composites sont développés dans [3].

Après avoir introduit le formalisme de Volterra, nous pouvons avoir une intuition plus claire des non-linéarités du système physique étudié : en effet, si on s'intéresse à l'état seulement (comme on l'a vu, le calcul de la sortie  $y(t)$  se déduit de celui de  $x(t)$  et de  $u(t)$  par la loi entrée-sortie), l'information de la contribution linéaire du système est comprise entièrement dans  $A$ , puisque d'après 2.7 et ce qui précède :

$$x_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{A\tau} u(t - \tau) d\tau$$

On retrouve donc la fonction de transfert du système linéarisé et sa définition classique dans le domaine de Laplace, avec la variable de Laplace  $s$  associée :

$$H_1(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \int_{\mathbb{R}_+} h_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{\mathbb{R}_+} e^{(A-s Id)\tau} d\tau = (A - s Id)^{-1} = W(s)$$

Par extension, on associera les noyaux de Volterra  $h_n$  à une fonction nommée **noyau de transfert**  $H_n$ , définie comme la transformée de Laplace multi-variable d'ordre  $n$  du noyau de Volterra :

$$\forall (s_1, \dots, s_n) \in (j\mathbb{F})^n, H_n(s_1, \dots, s_n) = \int_{\mathbb{R}_+^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_n\tau_n)} d\mathcal{I}$$

On présente en [3] (équation 2.26) une méthode de calcul des noyaux de Volterra nommée **Méthode des noyaux annulateurs**, qui permet d'obtenir la formule récursive suivante pour les noyaux de transfert de Volterra (qui implique la même combinatoire que les ordres  $r_n$  définis ci-avant) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (s_1, \dots, s_n) \in (j\mathbb{F})^n$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = W(\sum_{i=1}^n s_i) \left( \sum_{\substack{[p,q] \in \mathbb{N}^2 \\ 2 \leq p+q \leq n}} \mathbb{1}_{p \geq 1} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{N}^*)^p \\ m_1 + \dots + m_p = n - q}} \mathcal{M}_{p,q}(H_{m_1}(s_1, \dots, s_{m_1}), \dots, H_{m_p}(s_{m_1 + \dots + s_{m_{p-1} + 1}), 1, \dots, 1}) \right) + \mathcal{M}_{0,n}(1, \dots, 1) \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Un exemple : l'oscillateur de Duffing

On va dans cette partie appréhender le formalisme de Volterra et la description de systèmes nonlinéaires à travers un exemple de système présentant une non-linéarité sur la position.

#### Système et modélisation

Notre système est constitué d'une masse  $m$  repérée par sa position longitudinale  $q$ , d'un amortisseur linéaire de coefficient d'amortissement  $\alpha$  et d'une suspension non-linéaire dite "raidissante" d'ordre 3, caractérisée par sa force de rappel  $f_{susp}(q) = -kq(t)[1 + \epsilon q(t)^2]$ . On peut donc établir l'équation différentielle ordinaire suivante, reliant  $u$  la force d'excitation, entrée du système, à la position :

$$m \frac{d^2 q}{dt^2}(t) + \alpha \frac{dq}{dt}(t) + kq(t) [1 + \epsilon q(t)^2] = u(t) \quad (2.9)$$

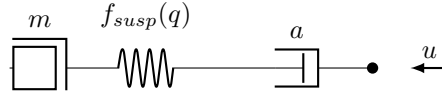


Figure 2.4: Schéma mécanique du système de Duffing proposé

Reformulons 2.9 par un système à représentations d'état, introduit en 2.5 :

$$\text{Etat : } x(t) = [q(t), \frac{dq}{dt}(t)]^T \quad \text{Sortie : } y(t) = [\frac{dq}{dt}(t)], \quad \text{Entrée : } u(t) = [f(t)]$$

$$\text{Equation dynamique : } \partial_t x(t) = Ax(t) + Bu(t) + \mathcal{M}_{3,0}[x, x, x](t)$$

$$\text{Loi entrée-sortie : } y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad D = [0]$$

$$\mathcal{M}_{3,0} \left[ \begin{bmatrix} q_1 \\ \frac{dq_1}{dt} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_2 \\ \frac{dq_2}{dt} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_3 \\ \frac{dq_3}{dt} \end{bmatrix} \right] (t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\epsilon q_1(t)q_2(t)q_3(t) \end{bmatrix}$$

#### Calcul des noyaux du système

On peut calculer la fonction de transfert du système linéarisé  $H_1$  (noyau de transfert d'ordre 1) :

$$\forall s \in j\mathbb{F}, H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{s}{ms^2 + \alpha s + k} = W(s)$$

où l'on retrouve la fonction de transfert  $W$  d'un filtre passe-bande d'ordre 2 amorti.

Pour calculer les noyaux de transfert d'ordre supérieur, on utilisera la méthode des noyaux anulateurs (formule 2.8) : dans notre cas, on obtient la formule suivante pour le noyau de transfert d'ordre  $n$ :

$$\forall s \in j\mathbb{F}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = W\left(\sum_{i=1}^n s_i\right) \left[ \delta_1^n - \epsilon k \sum_{p_1=1}^{n-1} \sum_{p_2=1}^{p_1-1} H_{p_2}(s_1, \dots, s_{p_2}) H_{p_1-p_2}(s_{p_2}, \dots, s_{p_1}) H_{n-p_1}(s_{p_1}, \dots, s_n) \right] \quad (2.10)$$

Tous les noyaux d'ordre pair sont nuls (cela vient du fait que la non-linéarité est polynômiale d'ordre impair), et le premier noyau non-nul est :

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = -\epsilon k W(s_1 + s_2 + s_3) W(s_1) W(s_2) W(s_3)$$

### Simulation et résultats

On a simulé le système décrit en 2.4 avec une structure de Système Hamiltonien à Ports, à l'aide de la librairie *Python* dédiée **pyPHS**. Cette formulation garantit la passivité du système (conservation du bilan de puissance totale du système, [6]) nous assurant alors de la "fidélité" physique des résultats. Cette simulation prend donc en entrée un signal d'excitation, ainsi qu'une liste des paramètres du modèle, pour nous fournir en sortie le déplacement de la membrane, et le courant circulant dans la bobine.

En figure 2.5, on observe le spectre de la réponse de l'oscillateur de Duffing aux signaux d'excitation suivant :

- Une sinusoïde de fréquence  $f_0 = 100Hz$
- Une somme de sinusoïdes de fréquence  $f_1 = 100Hz$ , et  $f_2 = 150Hz$
- Un sweep exponentiel à enveloppe sinusoïdale balayant la plage de fréquence  $[1, 2000] Hz$

On visualise donc ici les phénomènes de distorsion harmonique et d'intermodulation mentionnés en 2.1.4, pour une non-linéarité d'ordre 3.

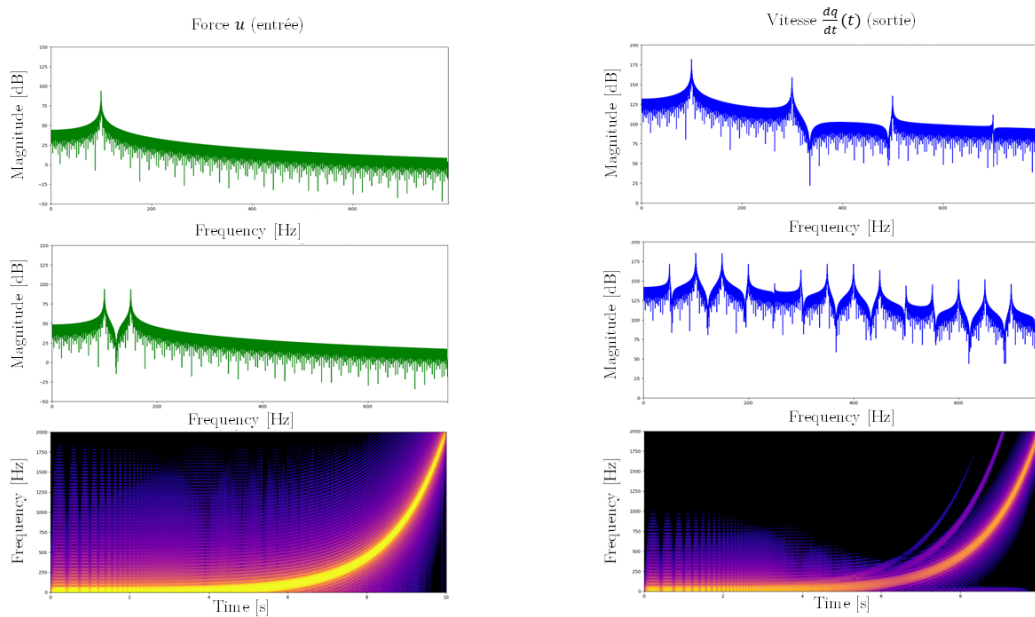


Figure 2.5: Amplitude spectrale des signaux d'entrée et sortie de l'oscillateur de Duffing  
 1er signal : Sinusoïde  $\{100Hz\}$ , 2e signal : Double sinusoïde  $\{100Hz, 150Hz\}$ , 3e signal : Sweep exponentiel à enveloppe sinusoïdale sur  $[1, 2000Hz]$

## 2.3 Méthodes de séparation en ordres homogènes [1]

### 2.3.1 Motivation

Il est présenté en 3.5.1 comment, pour un ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  donné, la connaissance des fonctions de transfert  $H_m, m \leq n$  permet l'estimation des coefficients  $\{\mathcal{M}_{p,q}, \mathcal{N}_{p,q}, (p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q \leq n\}$  par un processus itératif. Or, l'information du comportement linéaire et nonlinéaire du système jusqu'à l'ordre  $n$  est contenue dans ces coefficients et permet donc de remonter aux paramètres physiques du modèle préétabli.

Tout l'objectif est donc d'avoir accès aux  $x_n$  et  $y_n$  - que l'on nommera **ordres homogènes de non-linéarité** (respectivement de l'état et de la sortie) - par le biais de méthodes de séparation.

Les méthodes présentées ici - et plus amplement développées en [1] - s'appuient sur l'homogénéité des opérateurs de Volterra de rang  $V_n$  par rapport à des arguments complexes. En effet, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \{\alpha_k = r_k e^{j\theta_k}\}_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n, \forall t \in \mathbb{T}, \forall \{u_k\}_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$$

$$V_n[\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_n u_n](t) = \prod_{k=1}^n r_k e^{j\theta_k} V_n[u_1, \dots, u_n](t) \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Méthode AS [Amplitude-based Separation]

Une des méthodes basiques de séparation s'appuie sur cette propriété d'homogénéité pour discriminer les ordres à l'aide de facteurs d'amplitude : c'est la méthode **AS**, ou méthode de Séparation par relations d'Amplitude.

Soit une série de Volterra de degré  $N$  et les  $N$  ordres homogènes de non-linéarité  $y_n$  associés à une entrée  $u$  à valeurs quelconques:

$$V[u](t) = \sum_{n=1}^N y_n(t) = \sum_{n=1}^N V_n[u](t)$$

On peut utiliser un ensemble de  $N+1$  signaux d'entrées  $\{u_k, 0 \leq k \leq N\}$  que l'on désignera par **collection de signaux fils** dérivés à partir du signal original  $u$  et de coefficients  $\{\alpha_k, 0 \leq k \leq N\}$  selon  $u_k = \alpha_k u$ . Soient  $z_k = V[u_k]$  les sorties correspondantes, alors on peut écrire à l'instant  $t \in \mathbb{T}$  avec ?? que :

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} (t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^N \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_N & \dots & \alpha_N^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} (t) \quad (2.12)$$

Il suffit alors d'inverser la matrice de Vandermonde  $\mathbf{A}$ , qui est de déterminant non-nul ssi les  $\alpha_k$  sont tous non-nuls et distincts deux à deux.

**Remarque 2.4.** (Conditionnement) *Le calcul numérique de l'inverse de cette matrice de Vandermonde à coefficients réels est très peu robuste aux bruits de mesure et erreurs numériques car son conditionnement est particulièrement grand (dans [11] on donne des bornes inférieures à ce conditionnement selon les cas). Le conditionnement d'une matrice est défini par  $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_{\infty} \cdot \|\mathbf{A}\|_{\infty}^{-1}$  et est optimal lorsque  $\kappa(\mathbf{A}) = 1$ . Ce nombre permet d'évaluer la robustesse dont on dispose pour résoudre l'équation  $\mathbf{A}y = z$  lorsqu'une erreur existe sur l'évaluation de la matrice  $\mathbf{A}$  ou du vecteur  $z$  (ce qui correspond dans notre cas à un bruit de mesure par exemple).*

### 2.3.3 Méthode CPS [Complex-valued Phase-based Separation]

On peut également utiliser la propriété 2.11 uniquement avec des facteurs de phase pour des signaux à valeurs complexes.

Soit une série de Volterra de degré  $N$  et les  $N$  ordres homogènes de non-linéarité  $y_n$  associés à une entrée  $u$  à valeurs complexes :

$$V[u](t) = \sum_{n=1}^N y_n(t) = \sum_{n=1}^N V_n[u](t)$$

Utilisons une collection de  $P = N + 1$  signaux fils  $\{u_k, 0 \leq n \leq N\}$  dérivés à partir du signal original  $u$  et de coefficients  $\{\alpha_k = w^k = e^{\frac{2j\pi k}{P}}, 0 \leq k \leq P - 1\}$  selon  $u_k = \alpha_k u$ . Soient  $z_k = V[u_k]$  les sorties correspondantes, alors on peut écrire à l'instant  $t \in \mathbb{T}$  avec 2.11 que :

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} (t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^N & \dots & w^{N^2} \end{bmatrix}}_{W_P} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} (t) \quad (2.13)$$

**Remarque 2.5.** L'utilisation de ces facteurs de phase particuliers permet de rendre la matrice  $W_P$  rencontrée ci-avant unitaire (i.e. de déterminant égal à 1) puisqu'elle devient alors une matrice de Vandermonde générée à partir de facteurs répartis équitablement sur le cercle unité, c'est à dire une matrice de **Transformée Discrète de Fourier (TFD)**. On montre dans [12] que son conditionnement est alors optimal, ce qui est un cas particulier pour les matrices de Van Der Monde. La résolution du système ci-dessus sera donc particulièrement robuste aux bruits de mesure perturbant l'évaluation de  $z$ .

**Remarque 2.6.** (Repliement d'ordre) La troncature de la série de Volterra occasionne un phénomène de **repliement d'ordre** (à l'instar d'un repliement fréquentiel lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence d'échantillonnage trop faible). En effet, par  $P$ -périodicité des  $w$ , qui sont racines  $P^{\text{ème}}$  de l'unité, on a pour une série de Volterra **non tronquée** :

$$V_{\text{exact}}[wu](t) = \sum_{n=0}^{P-1} w^n \sum_{r=0}^{\infty} y_{n+rP}(t)$$

Donc en réalité la méthode CPS donne l'estimation des ordres suivante :

$$y_n^{\text{appr}}(t) = y_n^{\text{exact}}(t) + \sum_{r=1}^{\infty} y_{n+rP}^{\text{exact}}(t)$$

On a donc un terme résiduel  $\sum_{r=1}^{\infty} y_{n+rP}^{\text{exact}}$  du à l'erreur de troncature à un degré fini : on peut compenser ce phénomène en utilisant des facteurs de phase modifié par une amplitude fixe (voir [1])

### 2.3.4 Méthode PAS [Phase- and Amplitude-based Separation]

Si la méthode CPS paraît optimale en terme de robustesse et simplicité, elle ne permet toutefois pas de réaliser des mesures expérimentales puisque les signaux envisagés doivent être à *valeurs complexes*. On aura recours à une technique hybride utilisant à la fois des facteurs de phase et d'amplitude nommée **PAS**, qui dérive donc naturellement des 2 méthodes présentées ci-avant.

De façon très synthétique, pour séparer  $N$  ordres homogènes, la méthode utilise une collection de  $(1 + \lfloor \frac{N}{2} \rfloor)(2N + 1)$  signaux fils dérivés du signal original  $u$  à l'aide de facteurs de déphasage  $\{e^{j \frac{2\pi p}{2N+1}}\}_p$  et de facteurs d'amplitude  $\{\alpha_i\}_i$  comme suit :

- On constitue pour chaque signal  $u_i = \alpha_i u$  une sous-collection  $\{u_{p,i}\}_p$  de signaux par déphasage
- On applique une adaptation de la méthode CPS à ces signaux de la sous-collection
- Après avoir appliqué la méthode pour chaque sous-collection, on rassemble les différents signaux obtenus à l'aide de matrices de combinaison et de matrices de Van Der Monde analogues à celles rencontrées lors de l'introduction de la méthode AS, pour obtenir finalement les ordres homogènes de non-linéarité

Le détail de fonctionnement de cette méthode de séparation et ses performances sont répertoriées en [1].

Il convient toutefois de noter que lorsque l'on utilise la méthode **PAS**, on est amenés au cours de plusieurs étapes à inverser successivement des matrices de Vandermonde issues de la méthode **CPS** - optimalement conditionnées - et des matrices de Vandermonde à facteurs réels comme dans la méthode **AS**, donc dans l'ensemble le conditionnement total du processus n'est pas optimal (mais bien meilleur que si l'on utilisait seulement une méthode 2.3.2 avec beaucoup de facteurs d'amplitude).

On présentera également en 4.2 une méthode de séparation issue de **CPS**, très robuste et particulièrement adaptée à l'étude du contenu harmonique de la réponse d'un système.



### 3 Application de la séparation en ordres homogènes pour l'identification de paramètres

#### 3.1 Motivation

Les méthodes classiques d'identification de paramètres de Thiele-Small s'effectuent par *curve-fitting* sur les fonctions de transfert des différentes grandeurs observées, c'est à dire en minimisant une fonction de coût mesurant une distance entre la fonction de transfert expérimentale  $H_{exp}$  et une courbe paramétrique  $H_{par}$ . Cette courbe paramétrique est une fonction de transfert pilotée par les paramètres du modèle qui sont ajustés à chaque itération de l'algorithme de descente de gradient afin de correspondre au mieux aux données expérimentales. Un exemple d'application est donnée en première section de [10].

L'estimation sur un modèle linéaire est donc théoriquement valable dans la plage de fonctionnement linéaire d'un système, c'est à dire pour des niveaux d'excitation infiniment proches de zéro. Or le bruit de mesure issu de l'électronique de la chaîne d'acquisition, des capteurs, de l'environnement et de l'échantillonnage impose d'exciter le système à un niveau suffisant pour obtenir un rapport signal-sur-bruit décent. On sort donc rapidement du domaine d'approximation linéaire et l'estimation de paramètres linéaires par ces méthodes basiques comporte infailliblement un biais.

L'intérêt d'utiliser une estimation de paramètres portant sur les différents ordres homogènes de non-linéarité est alors double puisque l'on est alors permis :

- d'extraire la contribution du système linéarisé afin d'estimer de manière valide les paramètres de Thiele-Small à l'aide d'un modèle linéaire
- d'estimer les paramètres non linéaires pour en tirer des lois de comportement non linéaire du système et quantifier la perte de linéarité sur la plage de fréquences choisies

Dans les deux sections 3 et 4 on effectuera l'étude complète sur un haut-parleur de référence [Fostex FE208 Sigma] noté **F** et dont la fiche constructeur sont données en annexe G et le haut-parleur Vertex de la société Voxline, noté **V**, que l'on présente en annexe A. Le schéma de fonctionnement simplifié du banc expérimental est donné en figure 3.1

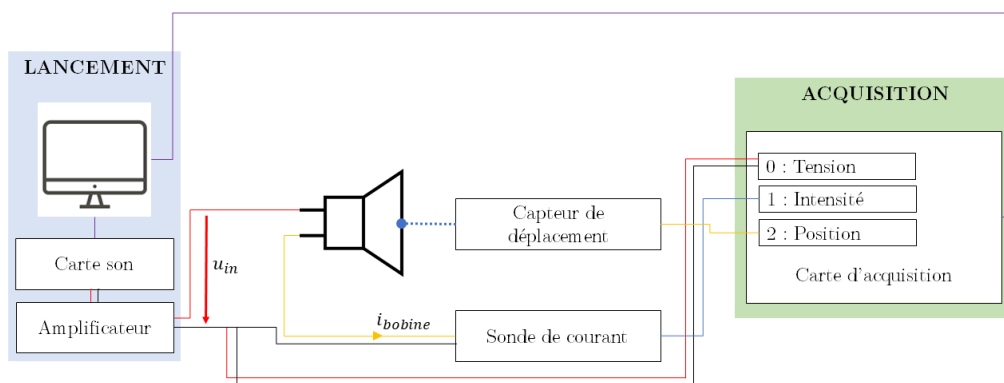


Figure 3.1: Schéma de fonctionnement du banc expérimental utilisé pour les mesures du courant et du déplacement sur un haut-parleur, en environnement anéchoïque

#### 3.2 Modèle retenu pour l'identification des paramètres

Le modèle adopté pour l'identification de paramètres prend en compte des non-linéarités sur la raideur de suspension et le couplage électromagnétique, que l'on exprime à l'aide d'expressions polynômiales en

le déplacement de la membrane noté  $q$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} Bl(q) = \sum_{n=0}^{N_B} Bl_n q^n \\ K_{ms}(q) = \frac{1}{C_{ms}(q)} = \sum_{n=1}^{N_K} K_n q^n \end{array} \right.$$

**Remarque 3.1.** La modélisation de ces non-linéarités par un polynôme permet d'obtenir des expressions très simples des coefficients  $\mathcal{M}_{p,q}$  (voir le système 3.2), ce qui rend possible le schéma d'estimation itératif décrit dans [1]

Un schéma équivalent est donné en figure 3.2 et les lois de comportement du système modélisé sont données par le système 3.2.

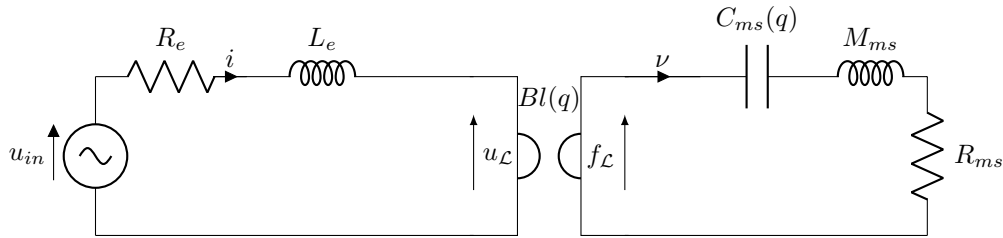


Figure 3.2: Schéma électrique équivalent du modèle choisi pour l'étude des hauts-parleurs

**Remarque 3.2.** On notera à l'instant  $t \in \mathbb{T}$  :

- $q(t)$  la position de la membrane
- $\phi(t)$  le flux magnétique circulant dans l'entrefer, et auquel est sujet la bobine
- $i(t)$  l'intensité du courant circulant dans la bobine (voir schéma équivalent)
- $u_{in}(t)$  la tension d'entrée (voir schéma équivalent)

Etat :  $x(t) = [\phi(t), q(t), M_{ms} \frac{dq}{dt}(t)]^T$ , Sortie :  $y(t) = [i(t), q(t)]^T$ , Entrée :  $u(t) = u_{in}(t)$

Equation dynamique :  $\partial_t x(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{n=2}^{N_B} \mathcal{B}_n(x(t)) + \sum_{n=2}^{N_K} \mathcal{K}_n(x(t))$

Loi entrée-sortie :  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L_e} & 0 & -\frac{Bl_0}{M_{ms}} \\ 0 & 0 & \frac{M_{ms}}{M_{ms}} \\ \frac{Bl_0}{L_e} & -K_1 & -\frac{R_{ms}}{M_{ms}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_n(x(t)) = \begin{bmatrix} -Bl_{n-1} \frac{dq}{dt}(t) q^{n-1}(t) \\ 0 \\ Bl_{n-1} \phi(t) q^{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad \mathcal{K}_n(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K_n q^n \end{bmatrix}$$

3.1: Système à représentation d'état décrivant le modèle choisi pour l'étude des hauts-parleurs

### 3.3 Extraction de la partie linéaire et validation

*Note : Dans cette partie, on notera par la variable  $y$  le signal de sortie du système de haut-parleur :  $y$  décrit donc indifféremment l'intensité du courant dans la bobine ou le déplacement de la membrane. Les variables écrites en lettres capitales seront les transformées de Laplace des variables en lettres minuscules.*

L'extraction de la partie linéaire s'effectue grâce à une méthode de séparation en ordres homogènes, ici la méthode PAS décrite en 2.3.4 : on sépare les différents ordres de non-linéarité et retient l'ordre homogène  $y_1$  supposé contenir la contribution du système linéarisé. On recherche ensuite les paramètres de Thiele-Small en minimisant la distance entre  $H_1(j\omega) = \frac{Y_1(j\omega)}{U(j\omega)}$  la fonction de transfert expérimentale du système linéarisé, et  $H_{par,lin}(j\omega)$  la fonction de transfert paramétrique du modèle linéaire de haut-parleur décrit dans 2.2.

**Remarque 3.3.** (Distance) La distance utilisée est une fonction quadratique avec une pondération décroissante en fonction de la fréquence, afin de donner plus de poids au comportement en basse fréquence du modèle, puisque à la fois la séparation  $y$  est plus précise, et également les résonances sont placées autour de ces fréquences, et comportent des points riches en informations sur le modèle :

$$\Gamma(H, \tilde{H}) = \sum_{k, s_k \in j\mathbb{F}} \left[ \frac{\|H(s_k) - \tilde{H}(s_k)\|}{\|\tilde{H}(s_k)\|} \log_{10}\left(\frac{s_{k+1}}{s_k}\right) \right]^2$$

#### Expérience de validation

Afin de s'assurer de la validité de l'extraction de la partie linéaire, on se propose de réaliser une étude expérimentale sur un système de haut-parleur que l'on va volontairement exciter hors du domaine linéaire avec plusieurs signaux test différents.

On va alors comparer les fonctions de transfert du système linéarisé  $H_{exp,1}(j\omega)$  pour chaque signal test, et faire de même avec les fonctions de transfert du système total (sans séparation donc)  $H_{exp,tot}(j\omega)$ .

L'extraction sera donc validée si l'allure de  $H_{exp,1}$  ne dépend pas du signal d'entrée, puisque pour le système linéarisé,  $H_{exp,1}(j\omega) = \frac{Y_{exp,1}(j\omega)}{U_{exp}(j\omega)}$  est une "vraie" fonction de transfert, tandis que pour le système total on suppose que la sortie dépend non linéairement de l'entrée (et pas seulement de son amplitude) :  $H_{exp,tot}(j\omega) = \frac{Y_{exp,tot}(j\omega, \mathbf{u})}{U_{exp}(j\omega)}$ .

Les signaux test ont été construits avec un contenu riche en fréquences, afin que chaque signal excite le système sur une large palme de fréquences de façon la plus continue possible : on a opté pour des *sweeps* exponentiels ascendant de  $f_{min}$  à  $f_{max}$  sur l'intervalle  $[0, \alpha\tau]$  puis descendant de  $f_{max}$  à  $f_{min}$  sur  $[\alpha\tau, \tau]$ , le point de retour étant paramétré par un réel  $\alpha \in [0, 1]$ .

Par construction, la phase sera de classe  $\mathcal{C}^1$  au point de raccordement  $t = \alpha\tau$  (par continuité de la fréquence instantanée). On obtient alors les expressions suivantes de la phase et de la fréquence instantanée du sweep :

$$f(t) = \begin{cases} f_1 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\frac{t}{\alpha\tau}} & \text{pour } t \in [0, \alpha\tau] \\ f_2 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{t-\tau(1-\alpha)}{\tau(1-\alpha)}} & \text{pour } t \in [\alpha\tau, \tau] \end{cases}$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{f_1\alpha\tau}{\ln(\frac{f_2}{f_1})} \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\frac{t}{\alpha\tau}} & \text{pour } t \in [0, \alpha\tau] \\ \frac{f_2\tau}{\ln(\frac{f_2}{f_1})} - \frac{f_1\tau(1-\alpha)}{\ln(\frac{f_2}{f_1})} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{t-\tau}{\tau(1-\alpha)}} & \text{pour } t \in [\alpha\tau, \tau] \end{cases}$$

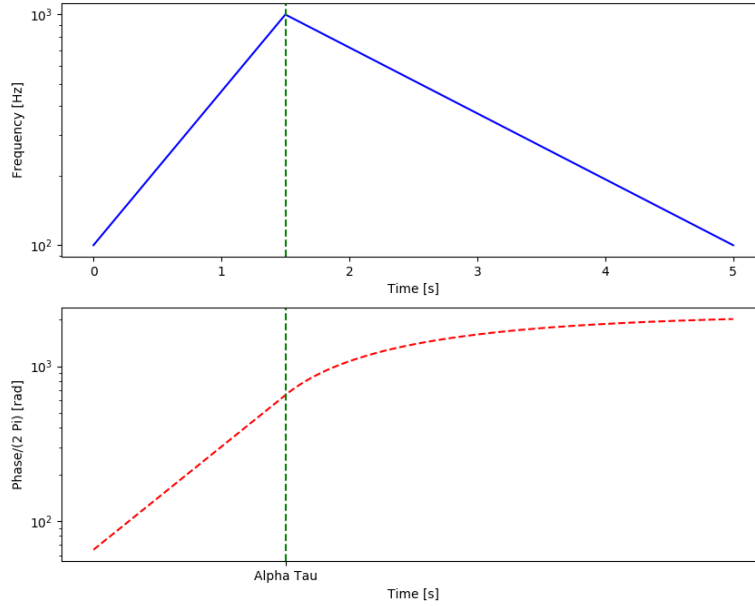


Figure 3.3: Aperçu des fréquences instantanée et phase pour un sweep ascendant et descendant avec paramètre  $\alpha = 0.3$

## Résultats

**Definition 3.1.** La cohérence entre deux signaux est une grandeur statistique composée des intercorrélations et des autocorrélations desdits signaux, et permet de mesurer la causalité entre les deux signaux (En considérant le signal  $u$  comme une entrée et le signal  $y$  comme une sortie, on mesure à quel point le signal  $u$  est susceptible d'être à l'origine du signal  $y$ )

$$\mathcal{C}(u, y)(j\omega) = \frac{|corr(u, y)|^2}{corr(u, u).corr(y, y)}(j\omega)$$

où

$$corr(a, b)(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)b(t + \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

est la fonction de densité spectrale de corrélation des deux signaux réels  $a$  et  $b$  (c'est donc la Transformée de Fourier de la fonction de corrélation temporelle)

**Remarque 3.4.** La cohérence de deux signaux à valeurs réelles correspondant à l'excitation et la réponse d'un système linéaire à cette excitation est optimale, c'est à dire égale à 1 sur tout le spectre, puisque les signaux sont reliables par une fonction de transfert :

$$\mathcal{C}(u, h * u)(j\omega) = \frac{|corr(u, h * u)|^2}{corr(u, u).corr(h * u, h * u)}(j\omega) = \frac{|corr(u, u)|^2 \cdot |H(j\omega)|^2}{corr(u, u).corr(u, u) \cdot |H(j\omega)|^2}(j\omega) = 1_{j\mathbb{F}}$$

puisque  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \Rightarrow corr(u, u) \in \mathcal{F}(j\mathbb{F}, \mathbb{R})$

On a tracé les figures de **cohérence** entre les signaux de tension, courant et position mesurés en 3.4, ainsi que les fonctions de transfert (courant vers tension) expérimentales issues de  $H_{exp,tot}$  et  $H_{exp,1}$  en

figure 3.5. On observe une amélioration de la cohérence à la résonance sur la réponse linéarisée, ce qui peut expliquer les meilleurs résultats après linéarisation de la réponse, puisqu'augmenter la cohérence revient à se rapprocher d'un cas où l'entrée et la sortie sont reliables par une fonction de transfert, donc d'un cas de système linéaire (cf remarque 3.4).

En effet, on observe en figure 3.5 que l'allure de  $H_{exp,1}$  est consistante au niveau de la résonance (i.e. ne dépend pas ou peu du type de signal mis en entrée), avec une bien meilleure fidélité que  $H_{exp,tot}$  ce qui est encourageant dans l'utilisation potentielle de  $H_{exp,1}$  puisque les paramètres sont estimés principalement aux alentours de cette résonance (voir 3.3).

En revanche, on observe une bifurcation des courbes  $H_{exp,1}$  aux hautes fréquences ( $f \geq 3000Hz$ ): la méthode de séparation peine à fonctionner sur ce régime de fréquence puisque les signaux de position particulièrement, et de courant également, deviennent assez faibles (donc le rapport signal-sur-bruit baisse, et le calcul numérique matriciel engendre plus d'erreurs relatives, surtout si le conditionnement de la matrice de Vandermonde utilisé n'est pas idéal, (cf. 2.4)).

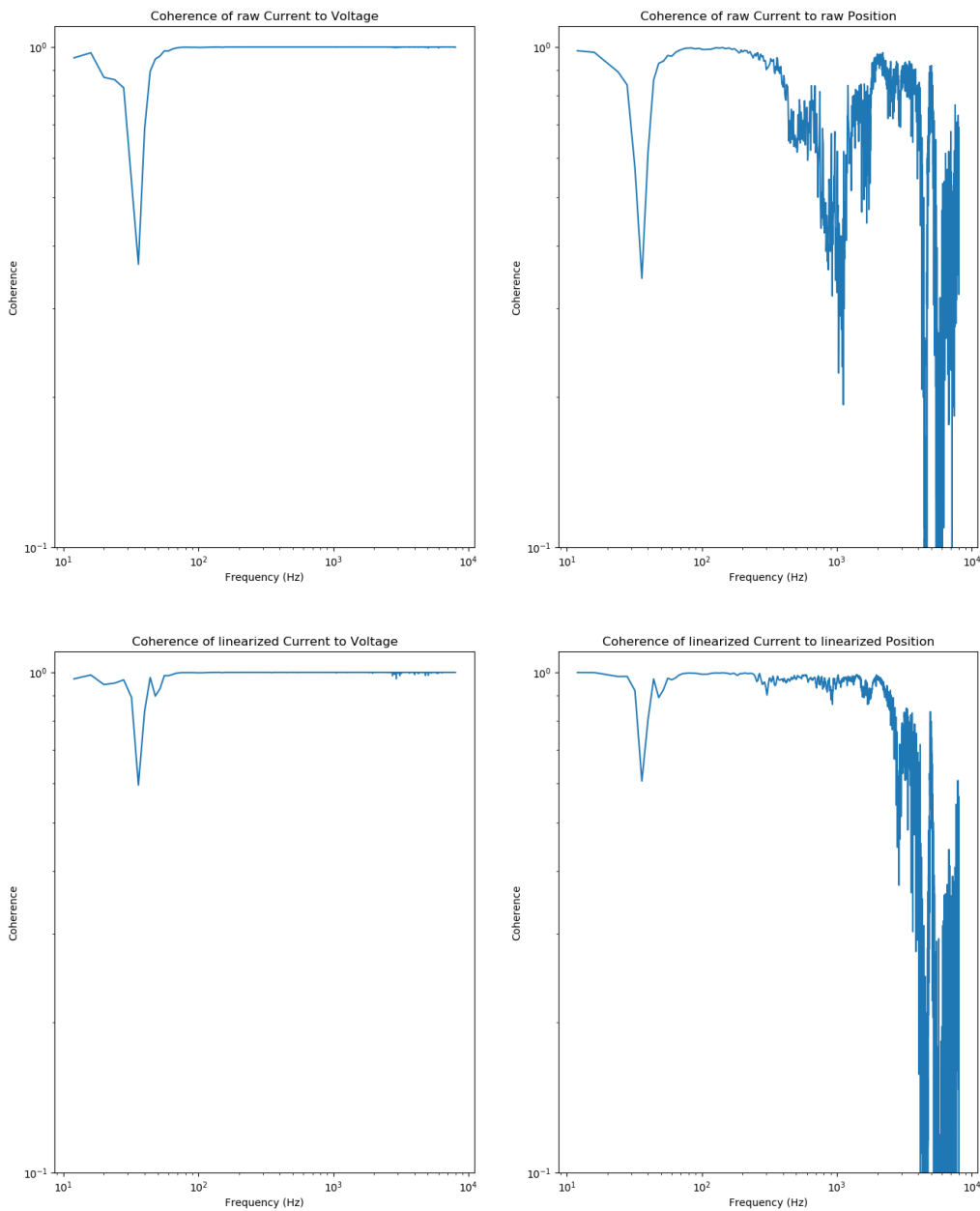


Figure 3.4: Cohérence entre les signaux d'entrée (tension) et sortie (courant, position) obtenus par fonction de transfert directe (*raw*) et par fonction de transfert sur réponse linéarisée (*linearized*)

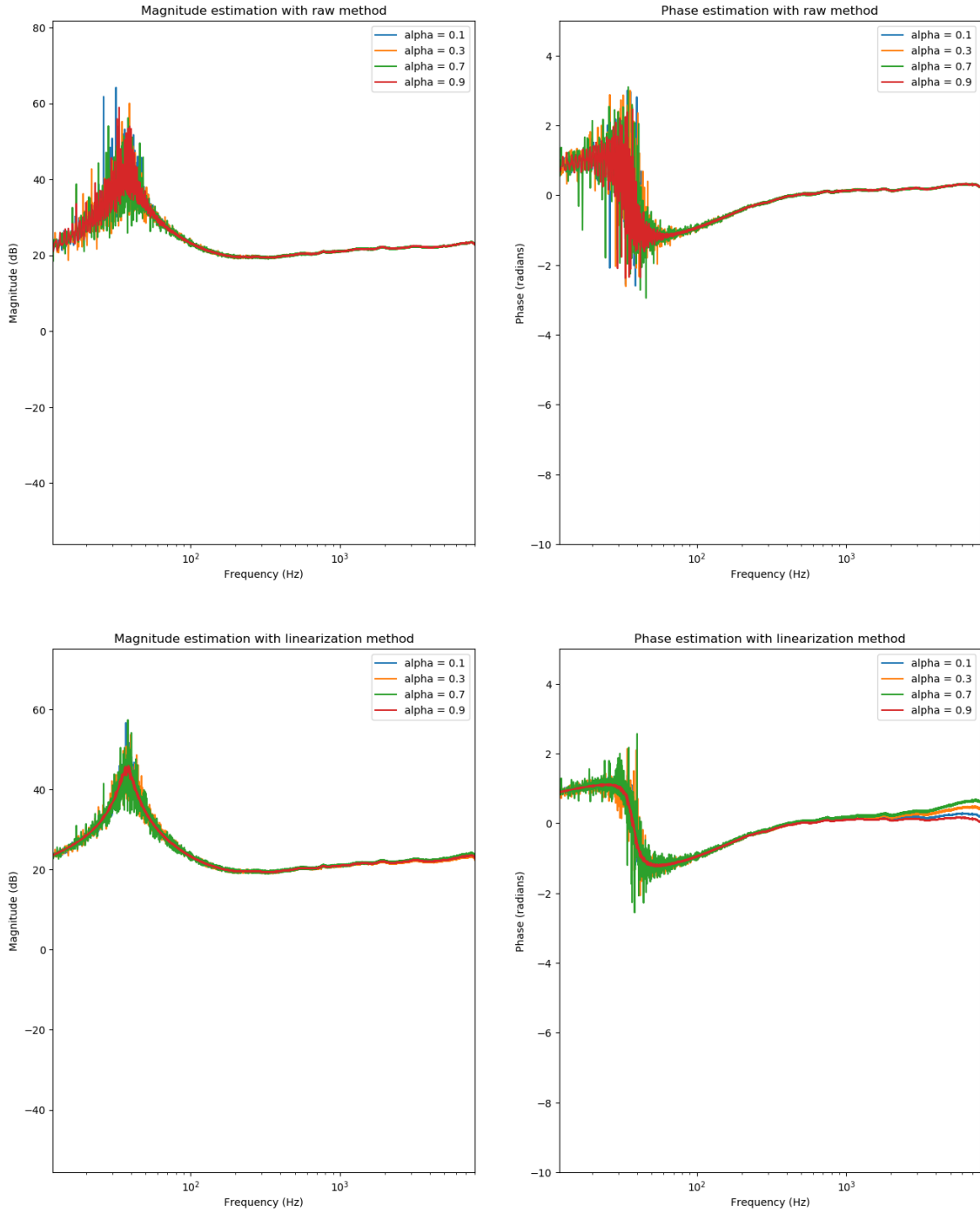


Figure 3.5: Fonctions de transfert  $\frac{Tension}{Intensite}$  obtenues par calcul direct (*raw*) et par calcul sur la réponse linéarisée (*linearized*)

Note : On n'a pas représenté la fonction de transfert  $\frac{Position}{Intensite}$  car le rapport signal-sur-bruit n'était pas satisfaisant sur cette série de mesures

### 3.4 Identification de paramètres linéaires de Thiele-Small

On compare les résultats de l'identification des paramètres de Thiele-Small sur les deux hauts-parleurs F et V. La donnée des valeurs des paramètres de F est une référence constructeur, on sait donc que leur valeur est plutôt précise mais évaluée sur un modèle linéaire donc on s'attend à un biais par rapport à la mesure sur système linéarisé. Les résultats de l'identification sont données en table 3.6 et 3.7, et les allures des fonctions de transfert expérimentale et paramétrique sont laissées en annexe E.

	Estimation	Référence constructeur	Erreur relative
Résistance de la bobine $R_e$	6.77 $\Omega$	6.45 $\Omega$	4.7 %
Couplage électromécanique $Bl_0$	8.66 $N.A^{-1}$	10.89 $N.A^{-1}$	20.4 %
Masse mobile $M_{ms}$	12.2 g	13.3	8.3 %
Raideur de suspension $K_0$	866 $N.m^{-1}$	936 $N.m^{-1}$	7.4 %
Résistance mécanique $R_{ms}$	0.578 $kg.s^{-1}$	0.572 $kg.s^{-1}$	1.0 %
Auto-inductance de la triple bobine $L_e$	0.065 $mH$	0.057 $mH$	12.3 %

Figure 3.6: Haut-parleur **F** : Paramètres de Thiele-Small identifiés grâce à la méthode PAS pour  $N=10$  ordres, et paramètres constructeur

	Estimation	Mesure	Erreur relative
Résistance de la bobine $R_e$	6.22 $\Omega$	6.16 $\Omega$	0.9 %
Couplage électromécanique $Bl_0$	18.43 $N.A^{-1}$		
Masse mobile $M_{ms}$	439.3 g	389 g	11.4 %
Raideur de suspension $K_0$	2841 $N.m^{-1}$		
Résistance mécanique $R_{ms}$	6.407 $kg.s^{-1}$		
Auto-inductance de la triple bobine $L_e$	0.149 $mH$		

Figure 3.7: Haut-parleur **V** : Paramètres de Thiele-Small identifiés grâce à la méthode PAS pour  $N=10$  ordres, et paramètres mesurés directement sur le haut-parleur à l'aide d'un multimètre ou par pesée

Pour le haut-parleur **F**, l'identification de paramètres donne des résultats proches de ceux du constructeur, et les fonctions de transfert linéarisées coïncident correctement sur la plage de fréquences choisies pour l'estimation. Dans la plage des hautes fréquences ( $f \geq 1000Hz$ ), le modèle linéaire peine à faire coïncider l'extraction et la courbe paramétrique car la séparation occasionne plus d'erreurs de calcul à cause de l'amplitude faible des signaux et du conditionnement non-optimal des matrices à inverser, d'où le choix de cette plage de fréquences tronquée (voir remarque 2.4).

En ce qui concerne le haut-parleur **V**, les résultats sont plutôt corrects et on arrive à faire coïncider les fonctions de transfert relativement correctement en tentant plusieurs plages de fréquences et en assistant l'algorithme de curve-fitting en lui fournissant des valeurs initiales proches des valeurs attendues, des plages de recherche réduites, etc.

Nous pouvons en conclure que l'extraction linéaire nous permet une estimation plutôt correcte des paramètres de Thiele-Small du haut-parleur **F**, on se permet alors de considérer que l'estimation de ceux de **V** nous fournit des paramètres corrects. (On arrive au moins à la bonne valeur de résistance, plus difficilement à la masse de la membrane, mais la modélisation mécanique semble bien plus ardue dans le cas du haut-parleur **V**).

### 3.5 Estimation des contributions non linéaires

#### 3.5.1 Présentation de la méthode

La méthode d'estimation des paramètres non linéaires se base sur l'estimation précédente des paramètres linéaires, et consiste en l'évaluation itérative des fonctions  $\mathcal{M}_{p,q}$  et  $\mathcal{N}_{p,q}$ .

Sans perdre de généralité, on s'intéressera seulement à l'évaluation de  $\mathcal{M}_{p,q}$ , le calcul de  $\mathcal{N}_{p,q}$  étant tout à fait identique.

Pour un ordre donné  $n \geq 2$ , notre but est d'estimer  $\mathcal{M}_{p,q}$  pour  $p + q = n$ . On estime connaître à ce point de l'algorithme :

- les paramètres du modèle linéaire, i.e. les matrices  $A, B, C, D$  par 3.4
- les paramètres non linéaires d'ordre inférieur, i.e. les  $\{\mathcal{M}_{p,q}, \mathcal{N}_{p,q}\}$  pour  $2 \leq p + q = m < n$  par l'itération précédente.

- les ordres homogènes  $\{x_m, y_m\}_{m < n}$  de l'état et de la sortie

L'état d'ordre homogène  $n$  s'écrit :

$$x_n = e^A * r_n$$

où  $r_n$  est donné par la relation 2.2.1. Connaissant,  $A$  on a accès à  $r_n$ , et connaissant les  $\mathcal{M}_{p,q}$  pour  $2 \leq p + q = m < n$  ainsi que les ordres homogènes  $x_m, m < n$  on a accès à la partie "innovante" du signal  $r_n$ :

$$r_n^{(i)} = r_n - \left[ \sum_{\substack{[p,q] \in \mathbb{N}^2 \\ 2 \leq p+q \leq n-1}} \mathbb{1}_{p \geq 1} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{N}^*)^p \\ m_1 + \dots + m_p = n - q - 1}} \mathcal{M}_{p,q}(x_{m_1}, \dots, x_{m_p}, u, \dots, u)(t) \right] + \mathcal{M}_{0,n-1}(u, \dots, u)(t) \quad (3.2)$$

$$= \sum_{p=0}^n \mathcal{M}_{p,n-p}(x_1, \dots, x_1, u, \dots, u) \quad (3.3)$$

On peut opérer le même raisonnement pour connaître la partie "innovante" du signal  $s_n$ :

$$s_n^{(i)} = \sum_{p=0}^n \mathcal{M}_{p,n-p}(x_1, \dots, x_1, u, \dots, u)$$

Et alors la partie "innovante" d'ordre  $n$ , représentant la contribution unique de l'ordre  $n$  à la sortie, est définie - et connue à l'ordre  $n$  - par :

$$y_n^{(i)} = s_n^{(i)} + CW * r_n^{(i)} \quad (3.4)$$

Les fonctions  $\{\mathcal{M}_{p,q}, \mathcal{N}_{p,q}\}$  étant multilinéaires en leurs arguments, et par hypothèse, symétriques par permutation des  $p$  premières variables en  $x$  et des  $q$  dernière variables en  $u$ , on peut les écrire sous forme de polynômes à plusieurs variables ([1]):

$$\mathcal{M}_{p,q}(x, \dots, x, u, \dots, u) = \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in \llbracket 0, \eta_x \rrbracket^p} \sum_{(l_1, \dots, l_q) \in \llbracket 0, \eta_u \rrbracket^q} m_{p,q}^{(k,q)} \prod_{i=1}^p x_{|k_i} \prod_{j=1}^q u_{|l_j} \quad (3.5)$$

où :

- $\eta_x, \eta_u$  sont les dimensions de l'espace de l'état et de l'espace de l'entrée
- $x_{|k}$  (respectivement  $u_{|k}$ ) est la  $k$ -ième coordonnée du vecteur  $x$  (respectivement  $u$ )

Ainsi, par 3.5, les  $\mathcal{M}_{p,q}$  dépendent linéairement des coefficients  $m_{p,q}^{(k,q)}$  qui sont les paramètres à estimer, et par 3.2 et 3.4, on montre que  $y_n^{(i)}$  dépend linéairement des paramètres à estimer. On peut alors simplement effectuer une régression linéaire en  $Y^{(i)} = G\Lambda$  où  $\Lambda$  est la matrice des paramètres à estimer, et  $G$  est une matrice combinant les signaux des ordres précédents, les paramètres des ordres précédents et les paramètres linéaires.

### 3.5.2 Résultats et discussion

Nous développons ici une méthode d'estimation de paramètres non linéaires qui permet à la fois de valider un modèle de comportement non linéaire, et d'estimer les paramètres de cette loi de comportement le cas échéant.

En effet, la séparation des ordres homogènes ne dépend pas d'un modèle préétabli, elle utilise simplement les propriétés de multilinéarité et d'homogénéité des opérateurs de Volterra : la seule hypothèse de validité de cette méthode est donc que l'on considère que le système étudié est (i) représentable en série de Volterra et (ii) *faiblement non linéaire* (voir 2.2.1).

Une fois cette hypothèse formulée, on effectue les 2 étapes suivantes :



- On extrait les ordres homogènes de non-linéarité de notre système en réponse à la collection de signaux *files* que l'on a constitué, et on identifie les paramètres linéaires puis non linéaires par le processus d'estimation itératif décrit en 3.5.1.
- A l'aide du modèle cette fois, on resimule les ordres homogènes à partir de nos paramètres estimés et de notre modélisation. On utilise pour cela la formule d'évaluation des noyaux issue de la méthode des noyaux annulateurs - dont un exemple est donné pour l'oscillateur de Duffing en équation 2.10 - et un schéma de **réalisation d'ordres**. Ce schéma de réalisation est celui sur lequel se base notre méthode d'estimation, et utilise une représentation du système en série de Volterra tronquée : on approxime l'ordre de non-linéarité de degré  $n$  à l'aide des contributions d'ordre  $m < n$  (structure *réursive non rétroactive*) tandis que le modèle exact fait intervenir tous les ordres de non-linéarité jusqu'à l'infini dans l'ordre de non-linéarité de degré  $n$  (structure avec *boucle de rétroaction*). On effectue donc une erreur, dans l'estimation des paramètres, qui est du même type que celle effectuée dans la resimulation des ordres de non-linéarité. On compare le modèle exact à celui du schéma de réalisation à l'aide de la figure 3.8 issue de [1].
- On compare les ordres séparés et les ordres simulés. S'ils sont suffisamment semblables, on estime que la séparation a fonctionné et que de plus, la modélisation du système non-linéaire est valide. A l'inverse, s'ils sont très différents en allure et en amplitude, alors il y a plusieurs possibilités expliquant cet échec :
  - La séparation n'a pas fonctionné car le système est trop fortement non linéaire ou, pire, pas représentable par une série de Volterra
  - La modélisation des phénomènes non linéaires intervenant dans le système est incorrecte : trop peu d'ordres sont pris en compte ou la forme de la loi de comportement (polynômiale dans notre cas, cf remarque 3.1) est fausse.

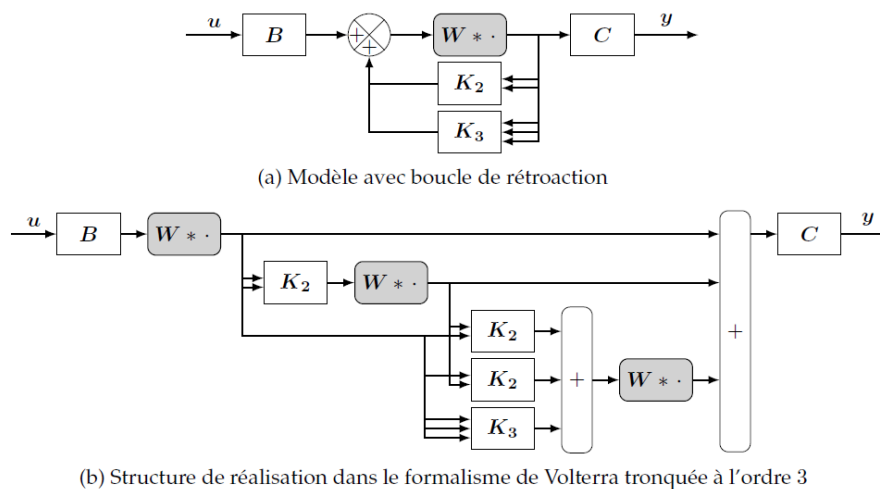


Figure 3.8: [Tiré de [1]] Modèle exact (a) (boucle de rétroaction) et Modèle de réalisation par série de Volterra tronquée à l'ordre 3 (b), pour un modèle comportant deux non-linéarités  $K_2, K_3$  respectivement d'ordre 2 et 3

### Résultats pour le haut-parleur F

Pour le haut-parleur F, on a excité à des tensions allant jusqu'à 5V, et on a séparé 7 ordres homogènes de non-linéarité par méthode PAS. On observe les ordres séparés, avec leur reconstruction après simulation du système à partir des paramètres non linéaires estimés en figure 3.9

On observe d'un point de vue de la méthode que :

- La séparation d'ordres fonctionne mal à hautes fréquences, comme déjà remarqué. On le repère pour le courant avec ces oscillations croissant avec la fréquence, mais pas pour la position car les amplitudes de déplacement à hautes fréquences sont minimales

- Sur certaines mesures, on observe cet *offset* sur les ordres pairs, probablement pour des raisons expérimentales, mais dont la source n'a pu être identifiée (malgré de nombreux questionnements sur l'influence du temps de pause entre les signaux fils, et sur le repérage du départ des signaux, leur synchronisations...)
- L'estimation des ordres inférieurs est effectivement d'autant meilleure que le degré de troncature de la série de Volterra est important (l'ordre 3 est mieux reconstruit que l'ordre 5, sans que cela ne dépende de son amplitude, mais seulement du fait que plus de signaux sont utilisés pour séparer l'ordre 3 que pour l'ordre 5). Seulement, pour des ordres supérieurs à 10, on peine numériquement à resimuler les ordres après estimation, le temps de calcul explosant rapidement.

Du point de vue des résultats maintenant, les ordres impairs sont relativement bien reconstruits jusqu'à l'ordre 5. Il est en effet remarqué ([13]) que pour le haut-parleur électroynamique classique, les non-linéarités d'ordre impair sont celles qui s'expriment le plus : cela s'explique du fait que les ordres pairs de non-linéarité sont la plupart du temps liés à des défauts de symétrie dans les lois de comportement, symétrie qui est recherchée par les constructeurs, dans la loi de comportement de la suspension par exemple. De fait, plus les ordres séparés sont forts en amplitude, meilleure est leur séparation et par conséquent l'estimation des paramètres associés, et plus fidèle est la reconstitution de ces ordres après simulation. On a donc choisi de tronquer la loi de comportement de  $\mathcal{B}_n(q)$  et  $\mathcal{K}_n(q)$  à l'ordre 5 pour obtenir un résultat significatif. Le tracé des lois de comportement est visible en figure 3.12.

La courbe de la force de rappel en fonction du déplacement est particulièrement intéressante car elle comporte :

- Une partie, proche du déplacement nul, où la suspension est "assouplissante", puisque la force de rappel est plus faible en norme que pour un ressort linéaire
- Une autre partie, pour  $|x| \geq 3mm$  où la suspension devient "raidissante", ce qui correspond à la présence d'un "point dur", phénomène remarqué par les constructeurs lors des mesures de leur membrane, et au sujet duquel manquent les références scientifiques.

Celle du couplage électromagnétique manque en revanche de cohérence physique au sein même de la plage de validité estimée, car le couplage tend vers 0 nécessairement en intensité lorsque la bobine sort du champ permanent pour les grandes excursions : une représentation polynômiale ne peut pas appréhender ce phénomène puisque la limite d'un polynôme pour des déplacements infinis est infinie. On conviendra donc qu'il faut resserrer la plage de validité autour de  $[-2, 2] mm$  pour la courbe représentant le couplage électromagnétique.

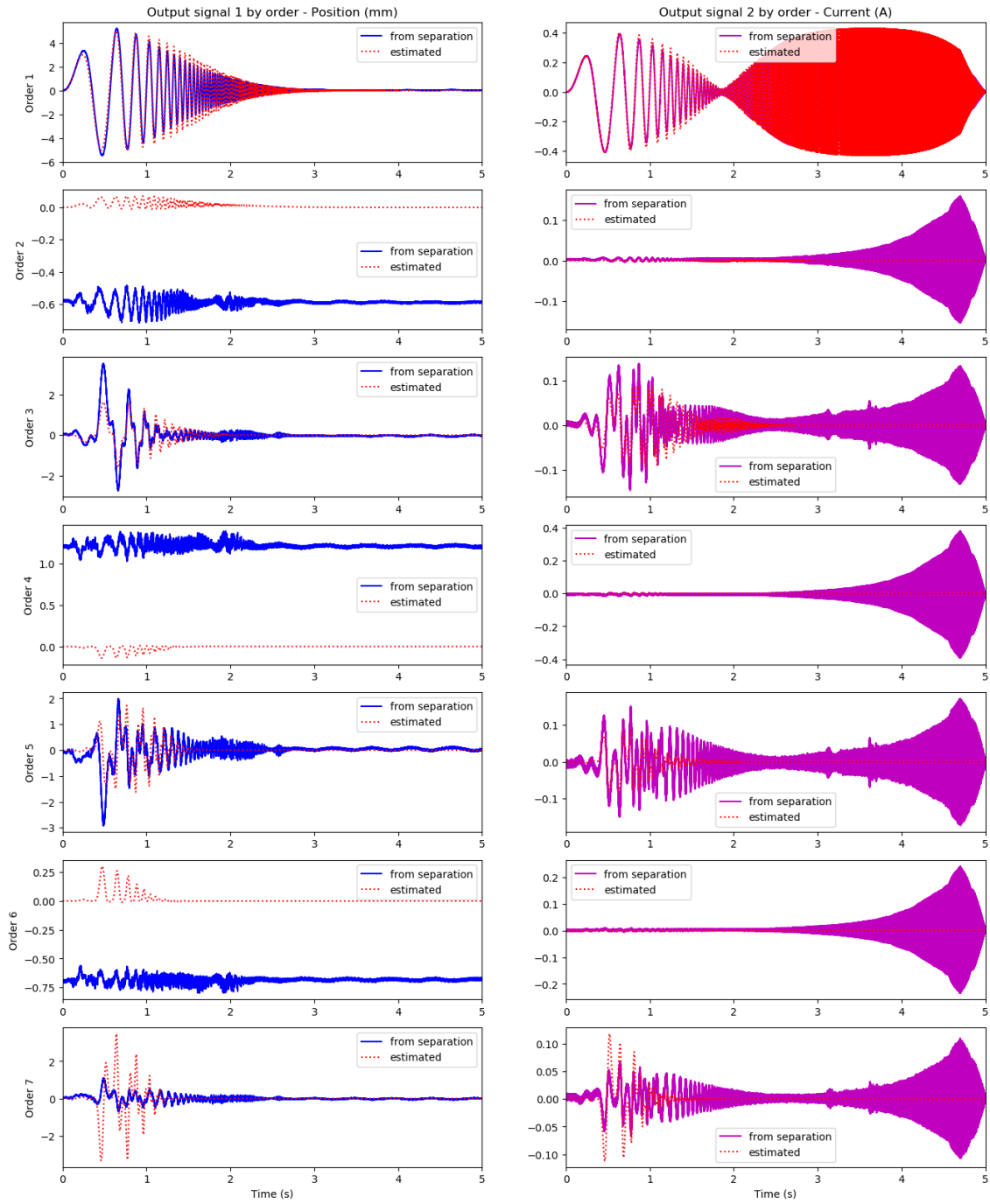


Figure 3.9: Haut parleur F : Ordres d'homogénéité séparés (en trait plein, bleu et magenta) et simulés après identification des paramètres non linéaires (en trait pointillé rouge) [PAS,  $N=7$ ]

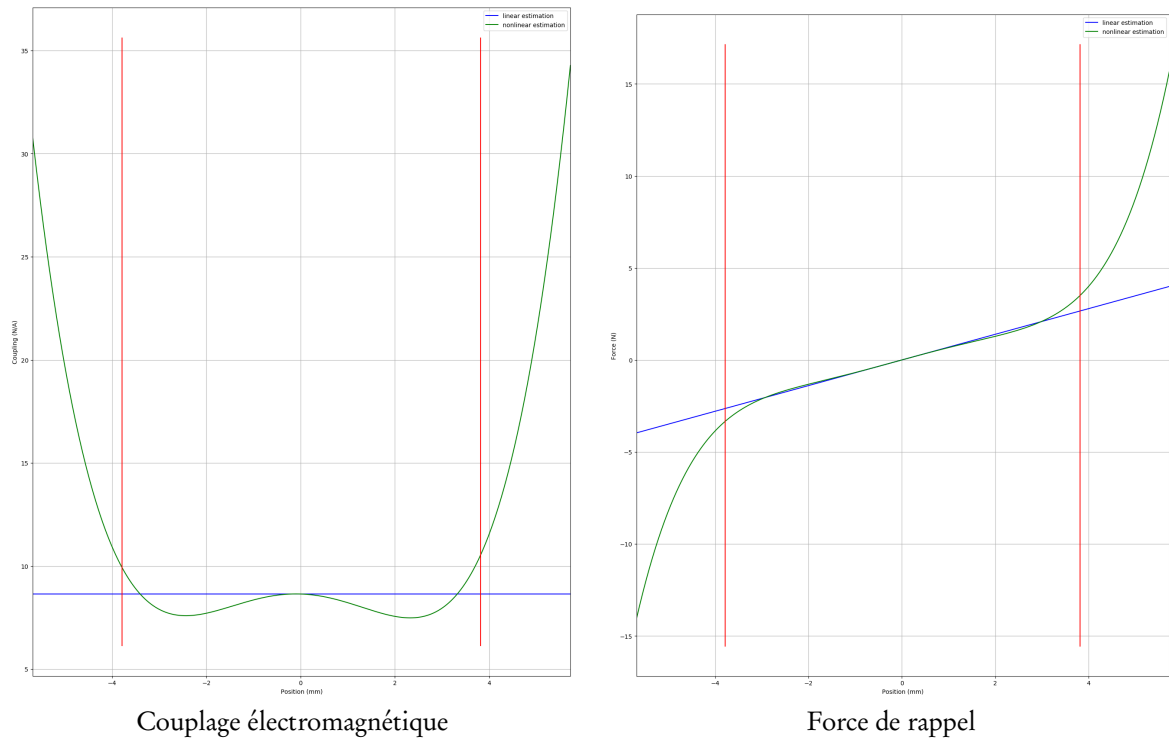


Figure 3.10: Haut-parleur F : Simulation des lois de comportement non linéaires après estimation des paramètres non linéaires par méthode PAS, troncature à l'ordre 5. La plage de validité de l'estimation est bornée par les lignes verticales (rouge, trait plein), mais est en réalité plus resserrée pour le couplage électromagnétique

### Résultats pour le haut-parleur V

Pour le haut-parleur V, on a excité à des tensions allant jusqu'à  $5V$ , et on a séparé 5 ordres homogènes de non-linéarité par méthode PAS. On observe les ordres séparés, avec leur reconstruction après simulation du système à partir des paramètres non linéaires estimés en figure 3.11.

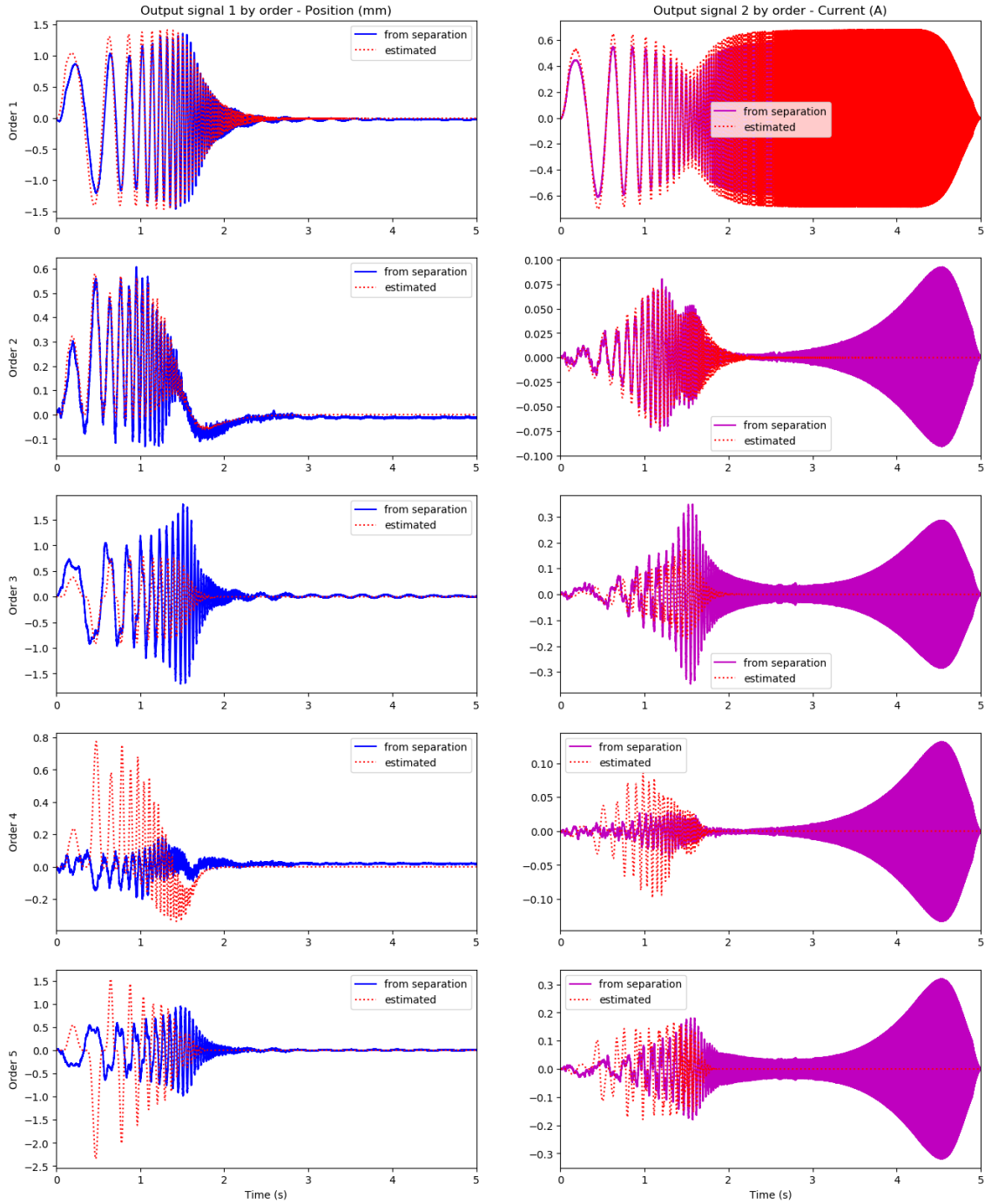


Figure 3.11: Haut parleur **V** : Ordres d'homogénéité séparés (en trait plein, bleu et magenta) et simulés après identification des paramètres non linéaires (en trait pointillé rouge) [PAS,  $N=5$ ]

On remarque immédiatement que les ordres homogènes de non linéarité séparés sont bien plus importants dans la réponse de **V** que **F** : le haut-parleur a un comportement hautement non linéaire, et surtout les ordres pairs sont bien plus prépondérants que dans la réponse du haut-parleur **F** : l'ordre 2 en déplacement représente 40 % de l'ordre 1, contre 2.5 % pour **F**. Cette importance des ordres pairs est facilement reliable à l'asymétrie de la structure de membrane-suspension dans **V**, comme la courbure importante de la membrane de profil cylindrique, associée à des précontraintes dans la structure issues du moulage de la membrane lors de la fabrication.

Les ordres homogènes ont été correctement reconstruits jusqu'à l'ordre 2, cependant un nombre plus grand d'ordres aurait été nécessaire pour améliorer l'estimation des ordres supérieurs. D'autre part il est tout à fait probable que le modèle que nous avons formulés soit trop simpliste lorsque nous le calquons sur

ce haut-parleur "exotique" dont nous n'appréhendons à ce jour qu'un nombre très limité de phénomènes. Cependant, la forme des ordres reconstruits correspond suffisamment à ceux séparés pour que nous puissions considérer la modélisation des non-linéarités comme relativement correcte. On a donc tronqué les lois de comportement à l'ordre 3 au vu du nombre trop faible d'ordres reconstitués fidèlement. On observe un résultat plutôt classique pour le couplage électromagnétique (une parabole excentrée), et une courbe peu réaliste pour la loi de comportement de la suspension. **Pour des raisons conjoncturelles (changement de modèle et campagne de mesures ajournée), nous n'avons pas pu répéter l'expérience à temps avec un plus grand nombre d'ordres, cependant une autre journée de mesures est prévue le 29 Août 2019 afin d'obtenir des données plus précises. Si pertinents, les résultats seront alors présentés au moment de la soutenance de ce rapport.**

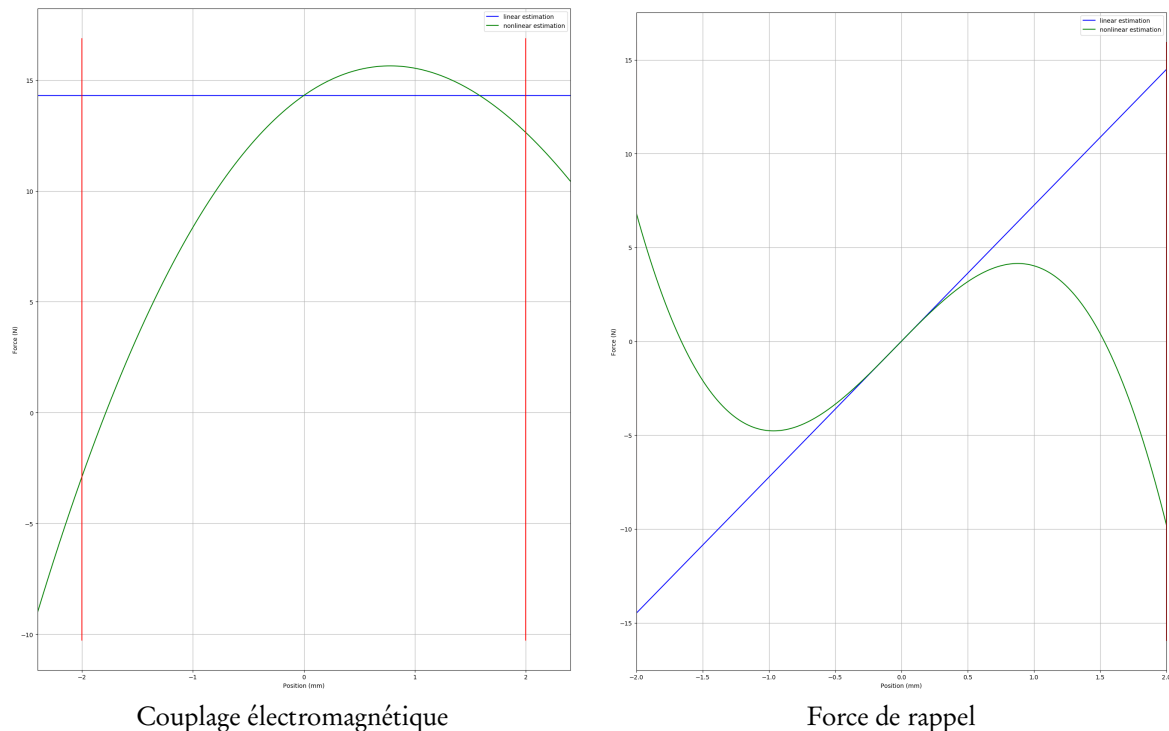


Figure 3.12: Haut-parleur V : Simulation des lois de comportement non linéaires après estimation des paramètres non linéaires par méthode PAS, troncature à l'ordre 3.

### 3.6 Éléments complémentaires et discussion

#### Mesures acoustiques et calcul d'impédance

En parallèle de l'étude expérimentale dédiée à l'identification des paramètres de Thiele-Small et des lois de comportement non linéaire des haut-parleurs **F** et **V**, nous avons mené sur **V** des campagnes de mesures "classiques" à l'aide de l'environnement anéchoïque de l'IRCAM, dont les résultats sont visibles en annexe H : mesures de champ de pression rayonné, mesures de directivité dans le plan médian, calcul des impédances... Beaucoup de questions ont émergées de ces études : il a été en effet remarqué que :

- La directivité du haut-parleur correspondait en tout point à celui d'un dipôle acoustique théorique, à l'exception d'une bande de fréquences centrée autour de 1000 Hz, où le lobe principal de directivité se scinde en 2, l'énergie rayonnée étant alors maximale aux angles  $\pm 45^\circ$ , comportement peu courant (voir figure 6.17).
- Les modes de vibration propre de la structure et des membranes étant selon les versions développées plus ou moins importants, on en repérait certains très remarquables dans la fonction de transfert de l'intensité vers la position  $H_{xvi}$ , c'est pourquoi on a mené une analyse modale afin de tenter d'en appréhender les conséquences sur le rendu acoustique du haut-parleur.

## Analyse Modale

Nous avons mené avec l'aide de l'Unité de Mécanique de l'ENSTA ParisTech (UME) - et particulièrement grâce à Benjamin Cotté et Emile Garnell, que nous remercions chaleureusement pour leur aide, leur expertise, les moyens et le temps alloué - une analyse modale par vibromètre laser à balayage de la structure de **V**. Nous avons placé le quadrillage du vibromètre sur toute la structure afin de distinguer *(i)* les modes de vibration propre du châssis et *(ii)* les modes de vibration des membranes. Les résultats de cette analyse ne sont pas encore rassemblés et mis en forme car ils font l'objet d'un autre stage de collaboration encore en cours entre Voxline et Ircam, effectué par Rémi Flachat. Les premiers éléments permettent toutefois de se rendre compte que le châssis était extrêmement mobile, cette mobilité générant des modes de vibration de plaques - certains modes symétriques par rapport aux axes vertical ou horizontal, ou d'autres de torsion - dont certains correspondaient à ceux observés sur la réponse en déplacement et en intensité (par couplage électromécanique). Ces phénomènes ne sont absolument pas pris en compte dans le modèle [3.2](#), ce qui peut fournir une explication supplémentaire quant à la reconstruction imparfaite des ordres homogènes de non-linéarité.

## 4 Séparation en ordres homophases et caractérisation de contenu harmonique

Dans cette section, on présentera les limitations de la séparation en ordres homogènes dans l'étude du contenu harmonique d'un système. On introduira alors ([1]) la notion de signaux homophases et on justifiera leur intérêt particulier pour caractériser et quantifier le contenu harmonique d'un système physique. Enfin, on présentera une nouvelle méthode de calcul de taux de distortion harmonique utilisant la séparation en signaux homophases.

### 4.1 Distorsion d'un système non linéaire : harmoniques et signaux homophases

On a vu en 2.2.2 que les non-linéarités des systèmes apportent des harmoniques dans la réponse à une excitation périodique. Les ordres homogènes de non-linéarité présentés en 2.3 contiennent plusieurs contributions harmoniques : pour une excitation périodique de fondamentale  $\omega$ , l'ordre homogène  $y_{n,n \in \mathbb{N}^*}$  contient toutes les harmoniques de même parité et de pulsation  $(p\omega)_{0 \leq p \leq n}$  (voir figure 4.1)

On ne peut donc isoler les contributions harmoniques à un ordre précis, tout du moins pas directement à l'aide des ordres homogènes extraits. On introduit dans la sous-section suivante un autre type de signal qui - on le verra ensuite - contient l'information harmonique recherchée et dont l'extraction a également l'avantage d'être plus robuste que la méthode PAS présentée en 2.3.4.

#### 4.1.1 Signaux homophases : définition

Dans 2.3.2 on a exploité la propriété d'homogénéité des opérateurs de Volterra en introduisant des facteurs d'amplitude pour des signaux réels, et de phase pour des signaux complexes (2.3.3). En réalité on peut également introduire un déphasage pour le cadre des signaux réels, en remarquant que

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \forall u \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) : \frac{e^{j\theta}u + e^{-j\theta}\bar{u}}{2} \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

On va alors exploiter la multilinéarité des opérateurs de Volterra, et pas seulement leur homogénéité, afin de définir des signaux intermédiaires nommés **signaux interconjugués** et les relier aux ordres homogènes de non-linéarité.

**Definition 4.1.** (*Signaux interconjugués*)

Soit  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$  et  $V_n$  un opérateur de Volterra de rang  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit les **signaux interconjugués**  $y_{n,q}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{T}, y_{n,q}(t) = V_n[\underbrace{u, \dots, u}_{n-q}, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_q](t)$$

On obtient alors pour ces signaux interconjugués des propriétés d'homogénéité d'ordre variable selon l'amplitude et le déphasage :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall \theta \in [0, 2\pi[, \forall u \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) :$$

$$V_n[\underbrace{\alpha e^{j\theta}u, \dots, \alpha e^{j\theta}u}_{n-q}, \underbrace{\overline{\alpha e^{j\theta}u}, \dots, \overline{\alpha e^{j\theta}u}}_q](t) = \alpha^n e^{(n-2q)j\theta} V_n[\underbrace{u, \dots, u}_{n-q}, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_q](t) \quad (4.1)$$

Une propriété fondamentale pour notre étude quant à la signification de ces signaux est la suivante :



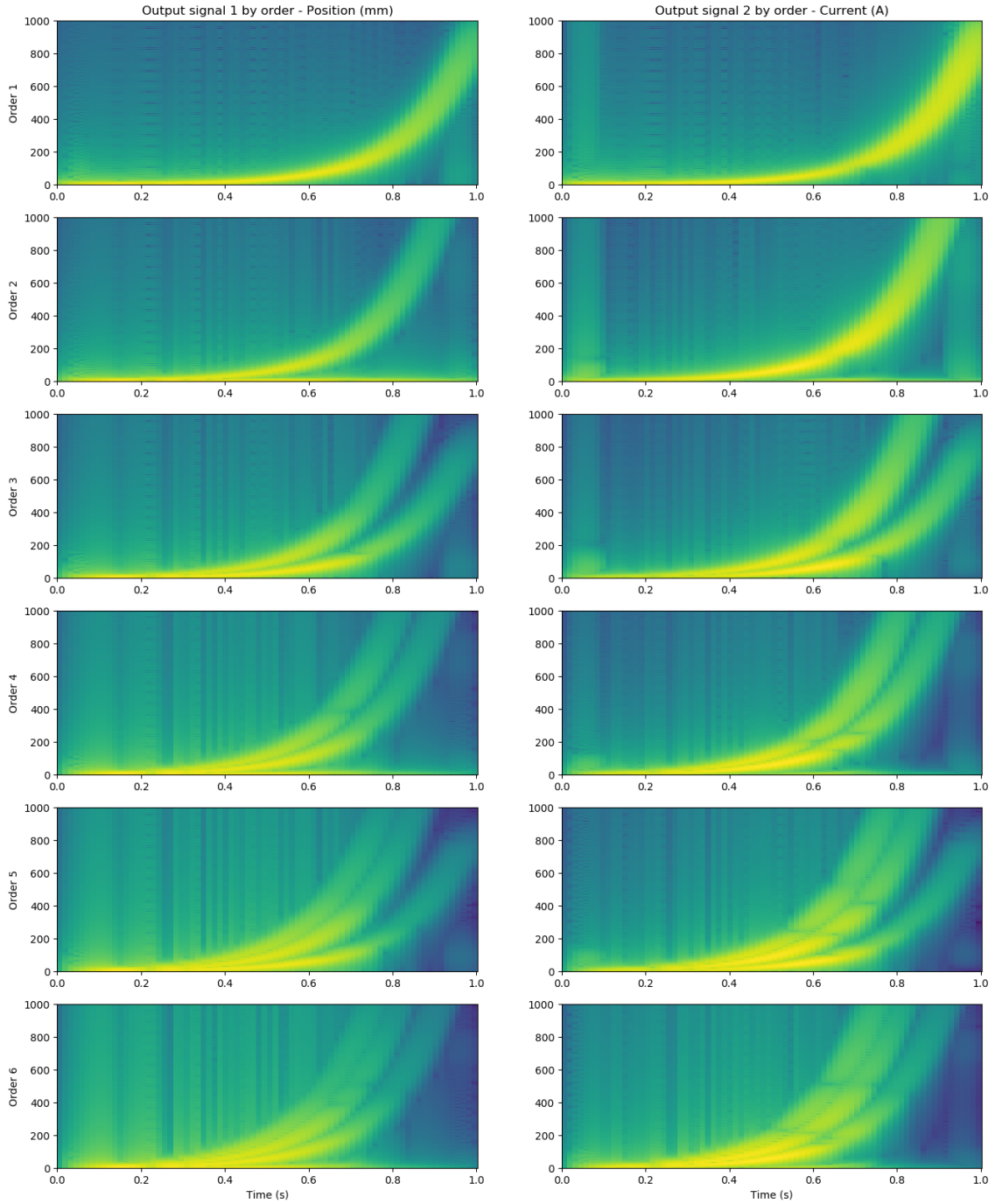


Figure 4.1: Spectrogrammes des ordres homogènes de non-linéarité en sortie d'un système simulé par Système Hamiltonien à Ports, excité par un sweep exponentiel à enveloppe sinusoïdale balayant la plage de fréquence [1, 2000] Hz

**Propriété 4.1.** Si  $u$  est un signal sinusoïdal complexe de fondamentale  $\omega$ , alors le signal interconjugué  $y_{n,q}$  est également un signal sinusoïdal complexe et représente la contribution d'ordre  $n$  du système à la pulsation  $(n - 2q)\omega$ .

On ne donne pas la preuve de cette propriété, puisque l'on fournira une preuve similaire dans le cas des signaux homophases en 4.3.

Comme évoqué, on peut reconstruire l'ordre homogène  $y_n$  pour une entrée  $r(t) = \mathcal{R}[u](t)$  à partir des signaux interconjugués  $y_{n,q}$ , la preuve se déduisant naturellement de l'homogénéité et de la multilinéarité des opérateurs de Volterra  $V_n$ :

$$\forall n \leq N, \forall t \in \mathbb{T}, y_n(t) = \sum_{q=0}^n V_n \left[ \frac{u + \bar{u}}{2}, \dots, \frac{u + \bar{u}}{2} \right] (t) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} y_{n,q}(t)$$

De même, si l'on introduit un déphasage  $e^{j\theta}$  sur le signal complexe  $u$ , on peut combiner la propriété 4.1 et la reconstitution ci-dessus pour écrire l'ordre homogène  $y_n$  pour une excitation  $\mathcal{R}[e^{j\theta}u]$ :

$$\forall n \leq N, \forall t \in \mathbb{T}, y_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} e^{j(n-2q)\theta} y_{n,q}(t) \quad (4.2)$$

A l'aide de cette reconstitution, on va regrouper par ordre de déphasage  $(n - 2q)$  les signaux interconjugués pour former la définition suivante :

**Definition 4.2.** (Signaux homophases)

Soit un système physique représentable en séries de Volterra, soit  $V$  la série de Volterra de degré  $N$  associée et  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$  l'intervalle de temps choisi pour la mesure.

Le signal homophase de rang  $p$  est alors défini de la manière suivante :

$$\forall t \in \mathbb{T}, \psi_p(t) = \sum_{\substack{|p| \leq n \leq N \\ n \pmod{p} [2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} y_{n, \frac{n-p}{2}}(t) = \sum_{\substack{n \geq |p| \\ n \pmod{p} [2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} V_n \left[ \underbrace{u(t), \dots, u(t)}_{\frac{n+p}{2}}, \underbrace{\bar{u}(t), \dots, \bar{u}(t)}_{\frac{n-p}{2}} \right]$$

Les signaux d'homophase possèdent par construction la propriété d'homogénéité par rapport à une facteur de déphasage : si on excite le système avec un signal  $v(t) = e^{j\theta}u(t)$ , le signal homophase d'ordre  $p$  résultant sera multiplié par le facteur  $e^{jp\theta}$ .

**Propriété 4.2.** On peut, à l'instar des ordres homogènes, reconstruire la sortie totale du système  $y(t)$  excitée par un signal  $r(t) = \mathcal{R}[\theta u](t)$  à l'aide des signaux homophases :

$$y(t) = \sum_{p=-N}^N \theta^p \psi_p(t) \quad (4.3)$$

La démonstration de cette formule est détaillée dans [1] en annexe.

#### 4.1.2 Liens entre signaux homophases et harmoniques

Dans [2], il est proposé pour les systèmes représentables en séries de Volterra un calcul théorique des harmoniques de la réponse d'un système à une entrée périodique.

Soit  $V$  une série de Volterra associée à ses noyaux  $h_n$  et aux fonctions de transfert  $H_n$ ,  $u$  un signal périodique complexe sur l'intervalle  $\mathbb{T}$ , de fondamentale  $\omega$  et  $r = \mathcal{R}[u](t)$  sa partie réelle, décomposable en sa série de Fourier selon :

$$\forall t \in \mathbb{T}, r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k e^{jk\omega t}$$

Alors ([2]) la sortie  $y$  du système est elle-même périodique et décomposable en série de Fourier selon :

$$\forall t \in \mathbb{T}, y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{jk\omega t} \quad (4.4)$$

avec  $d_k$  l'amplitude de l'harmonique de rang  $k$  donnée par :

$$d_k = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \dots + k_n = k}} r_{k_1} \dots r_{k_n} H_n(jk_1\omega, \dots, jk_n\omega) \quad (4.5)$$

Cette représentation associe naturellement les harmoniques de rang  $k$  aux harmoniques du signal entrant et les noyaux de Volterra du système. On peut alors définir le THD comme :

**Definition 4.3.** (*Taux Harmonique de Distorsion*)

$$\mathcal{T} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|d_n|^2}{|d_1|^2} \quad (4.6)$$

Le lien entre harmoniques et signaux homophases dans le cas d'un signal sinusoïdal est alors le suivant :

**Propriété 4.3.** (*Lien entre harmoniques et signaux homophases*) Soit un système représentable par sa série de Volterra  $V$  de degré  $N$ , soit un signal sinusoïdal complexe de référence  $u(t)$  de pulsation  $\omega$  et  $r$  sa partie réelle  $r(t) = \mathcal{R}[u](t)$ . Soit  $y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{jk\omega t}$  la réponse de ce système à l'excitation  $r$

Alors on a :

$$\forall p \in [-N, N], \forall t \in \mathbb{T} : \psi_p(t) = d_p e^{jp\omega t}$$

**Remarque 4.1.** Si  $u$  est un signal sinusoïdal complexe de fréquence  $\omega$  alors le signal homophase  $\psi_p$  est également un signal sinusoïdal complexe et représente la contribution de tout le système à la pulsation  $p\omega$ .

**Preuve de 4.3**

On fera le lien avec la définition donnée en 4.5 et ce qui précède, dans le cas d'une excitation sinusoïdale, et on ébauche une recherche de lien pour le cas d'une excitation périodique en annexe B.

Soit  $V$  une série de Volterra et  $u$  une excitation complexe sinusoïdale de pulsation  $\omega : u(t) = Ae^{j\omega t}$  et  $r(t) = A\cos(\omega t)$  sa partie réelle. On excite le système avec  $r$ , le signal homophase de rang  $p$  extrait à partir de la sortie  $V[r](t)$  est donné par :

$$\begin{aligned} \psi_p(t) &= \sum_{\substack{n \geq |p| \\ n \bmod p[2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} V_n \left[ \underbrace{u(t), \dots, u(t)}_{\frac{n+p}{2}}, \underbrace{\bar{u}(t), \dots, \bar{u}(t)}_{\frac{n-p}{2}} \right] \\ &= \sum_{\substack{n \geq |p| \\ n \bmod p[2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} \int_{\mathbb{R}^{+n}} h_n(\tau) \underbrace{Ae^{j\omega\tau_1} \dots Ae^{j\omega\tau_{\frac{n+p}{2}}}}_{\frac{n+p}{2}} \underbrace{Ae^{-j\omega\tau_{\frac{n+p}{2}+1}} \dots Ae^{-j\omega\tau_{\frac{n-p}{2}}}}_{\frac{n-p}{2}} \underbrace{e^{-j\omega\tau_1} \dots e^{-j\omega\tau_{\frac{n+p}{2}}}}_{\frac{n+p}{2}} \underbrace{e^{+j\omega\tau_{\frac{n+p}{2}+1}} \dots e^{+j\omega\tau_n}}_{\frac{n-p}{2}} d\tau \\ &= \sum_{\substack{n \geq |p| \\ n \bmod p[2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} \int_{\mathbb{R}^{+n}} h_n(\tau) A^n e^{jp\omega t} \underbrace{e^{-j\omega\tau_1} \dots e^{-j\omega\tau_{\frac{n+p}{2}}}}_{\frac{n+p}{2}} \underbrace{e^{+j\omega\tau_{\frac{n+p}{2}+1}} \dots e^{+j\omega\tau_n}}_{\frac{n-p}{2}} d\tau \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable  $n = 2m + p$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi_p(t) &= e^{jp\omega t} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2m+p}{m}}{2^{2m+p}} \left(\frac{A}{2}\right)^{2m+p} \int_{\mathbb{R}^{+n}} h_n(\tau) \underbrace{e^{-j\omega\tau_1} \dots e^{-j\omega\tau_{m+p}}}_{m+p} \underbrace{e^{+j\omega\tau_{m+p+1}} \dots e^{+j\omega\tau_{2m+p}}}_m d\tau \\ &= e^{jp\omega t} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2m+p}{m}}{2^{2m+p}} \left(\frac{A}{2}\right)^{2m+p} H_{2m+p} \left( \underbrace{j\omega, \dots, j\omega}_{m+p}, \underbrace{-j\omega, \dots, -j\omega}_m \right) \end{aligned}$$

De son côté M. Hasler donne dans [2] l'expression suivante pour les  $d_k$  définis en 4.5 :

$$d_k = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ k_1, k_2, \dots, k_n = \pm 1 \\ k_1 + \dots + k_n = k}} \sum_{r_{k_1} \dots r_{k_n}} r_{k_1} \dots r_{k_n} H_n(jk_1\omega, \dots, jk_n\omega) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ k_1, k_2, \dots, k_n = \pm 1 \\ k_1 + \dots + k_n = k}} \left(\frac{A}{2}\right)^n H_n(jk_1\omega, \dots, jk_n\omega)$$

On obtient une somme avec  $n$  indices de valeur  $\pm 1$ , que l'on peut dénombrer en ayant  $m+k$  termes de valeur  $+1$  et  $m$  termes de valeur  $-1$ . En tout il y a  $2m+k$  termes,  $m$  étant un entier naturel. On utilise alors la symétrie des noyaux de Volterra  $\{h_n\}$  (et donc de leurs fonctions de transfert  $\{H_n\}$ ) par rapport à une permutation d'arguments (qui est une propriété acquise sur les systèmes rencontrés) pour écrire :

$$d_k = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2m+k}{m}}{2^k} \left(\frac{A}{2}\right)^{k+2m} H_{k+2m}(\underbrace{j\omega, \dots, j\omega}_{m+k}, \underbrace{-j\omega, \dots, -j\omega}_m)$$

On obtient alors que pour ce cas simple :

$$\forall p \in \mathbb{Z} : \psi_p(t) = d_p e^{jp\omega t} \quad (4.7)$$

Ce qui correspond bien à la contribution harmonique d'ordre  $p$  du système à la réponse totale du système (cf 4.4).

La notion de signaux homophases et leur signification permet alors non-seulement de caractériser (et d'extraire) les contributions harmoniques d'un système en réponse à une entrée périodique, mais leur extraction conserve également un sens pour le cas d'une excitation non-périodique. En effet, grâce à la méthode HPS présentée dans la sous-section suivante, on extrait les signaux homophases pour n'importe quel type d'entrée. On veut alors montrer que l'on conserve la notion d'harmoniques à travers l'exemple du sweep, et que l'on pourrait étendre l'étude du contenu harmonique à partir de n'importe quel type de signal à l'aide de ces signaux homophases.

## 4.2 Méthode HPS [Homophase Phase-based Separation]

### 4.2.1 Présentation de la méthode

La méthode **HPS** est une variante de **CPS** adaptée à la séparation de signaux à valeurs réelles.

Soit  $V$  une série de Volterra de degré  $N$  et un signal de référence à valeurs complexes  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$  et  $r = \mathcal{R}[u] \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$  le signal d'excitation à valeurs réelles associé. Soient  $P = 2N + 1$  et les facteurs de déphasage  $w = e^{-j\frac{2\pi}{P}}$ . On introduit  $P$  signaux fils à valeurs réelles  $r_k = \mathcal{R}[w^k u]$  et on observe les sorties correspondantes  $z_k = V[r_k]$ . Par la relation 4.3, on a :

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{P-1} \end{bmatrix} (t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & w & \dots & w^P \\ 1 & w^2 & \dots & w^{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^P & \dots & w^{P^2} \end{bmatrix}}_{W_P} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \\ \psi_{-N} \\ \vdots \\ \psi_{-1} \end{bmatrix} (t) \quad (4.8)$$

Par simple TFD inverse (inversion de la matrice  $W_P$ ) d'ordre  $P = 2N + 1$  on obtient donc les signaux homophases recherchés : il faut bien utiliser  $2N + 1$  signaux d'entrée, par rapport à  $N + 1$  pour la méthode **CPS** car travaillant sur des signaux réelles il faut prendre en compte les indices de phases  $p$  positifs et négatifs. On remarque que la structure du vecteur  $\psi = [\psi_0, \dots, \psi_{-1}]^T$  provient de la symétrie hermitienne des  $\psi_p$  selon  $p$ , et correspond bien au fait que le vecteur  $\psi$  représente le spectre du vecteur réel  $z = [z_0, \dots, z_{P-1}]^T$ .

Comme dans 2.3.3, le conditionnement de la matrice à inverser est optimal (matrice unitaire) donc la robustesse au bruit de la méthode est particulièrement élevée et il suffit d'avoir un nombre  $P$  élevé de signaux pour réduire l'effet du repliement d'ordre (cf 2.6).

#### 4.2.2 Résultats sur système simulé

On a simulé le système décrit en 3.2 avec une structure de Système Hamiltonien à Ports, à l'aide de la librairie *Python* dédiée **pyPHS**. On a excité le système avec un sweep balayant la plage [1, 2000] Hz, on a tronqué la série de Volterra à l'ordre  $N = 10$ , séparé 10 ordres homophases avec la méthode **HPS** et tracé 7 ordres homophases, visibles sur la figure 4.2.

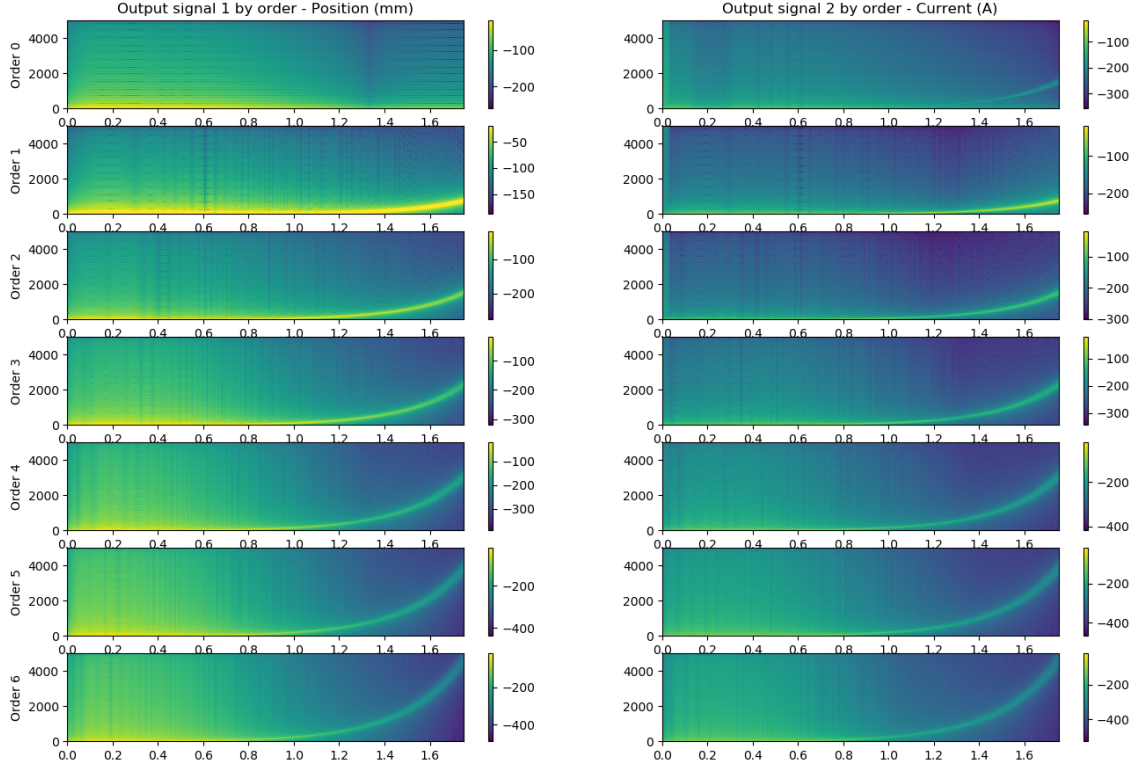


Figure 4.2: Spectrogrammes de 7 ordres homophases de la réponse en courant et en déplacement du système simulé, à partir d'un sweep exponentiel à enveloppe sinusoidale balayant la plage [1, 2000]Hz

On observe clairement que la séparation du signal homophase d'ordre  $p$  apporte la contribution harmonique du système à l'ordre concerné, à savoir des sweeps de fréquence instantanée  $p\omega(t)$ .

Comme pour la séparation en ordres homogènes de non-linéarité, on a voulu trouver un schéma de réalisation permettant de vérifier la justesse des signaux homophases obtenus après séparation. On a alors adapté le schéma présenté en 3.8 en utilisant des **opérateurs de Volterra multi-entrée mono-sortie**.

**Definition 4.4.** (*Opérateur de Volterra multi-entrée mono-sortie*)

Soit un système représentable en série de Volterra, associé à ses noyaux de Volterra  $h_n$  et les noyaux de transfert  $H_n$ . Soient  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, \mathbb{C})^n$  des signaux d'entrée, et leurs transformées de Laplace  $(U_1, \dots, U_n)$ . On définit l'opérateur de Volterra de rang  $n$  multi-entrée mono-sortie par :

$$\forall (s_1, \dots, s_n) \in j\mathbb{F}^n, \mathcal{L}[\hat{V}_n][u_1, \dots, u_n](s_1, \dots, s_n) = H_n(s_1, \dots, s_n)U_1(s_1) \dots U_n(s_n) \quad (4.9)$$

**Propriété 4.4.** La définition précédente est équivalente à définir  $\hat{V}_n$  dans le domaine temporel par :

$$\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n, \hat{V}_n[u_1, \dots, u_n](t_1, \dots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)u_1(t_1 - \tau_1) \dots u_n(t_n - \tau_n)d\tau$$

La preuve s'obtient naturellement par  $n$ -transformée de Laplace inverse de la définition 4.4

**Propriété 4.5.** Pour une entrée  $u \in \mathbb{U}$  et un instant  $t \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $\hat{V}_n$  vérifie :

- $\hat{V}_n[u_1 = u, \dots, u_n = u](t_1 = t, \dots, t_n = t) = V_n[u, \dots, u](t)$
- $\hat{V}_n[\underbrace{u_1 = u, \dots, u_{n-q} = u}_{(n-q)}, \underbrace{u_{n-q+1} = \bar{u}, \dots, u_n = \bar{u}}_{(q)}](t_1 = t, \dots, t_n = t) = y_{n,q}(t) = V_n[\underbrace{u, \dots, u}_{(n-q)}, \underbrace{\bar{u}, \dots, \bar{u}}_{(q)}](t)$

En utilisant la dernière propriété ainsi que la formule des noyaux annulateurs 2.8, on peut alors obtenir les signaux interconjugués en prenant une combinatoire des entrées adaptée  $(u_1, \dots, u_k) \in \{u, \bar{u}\}^n$ , ce qui nous donne le schéma 4.3. Il suffit alors de les combiner selon la définition pour obtenir les signaux homophases.

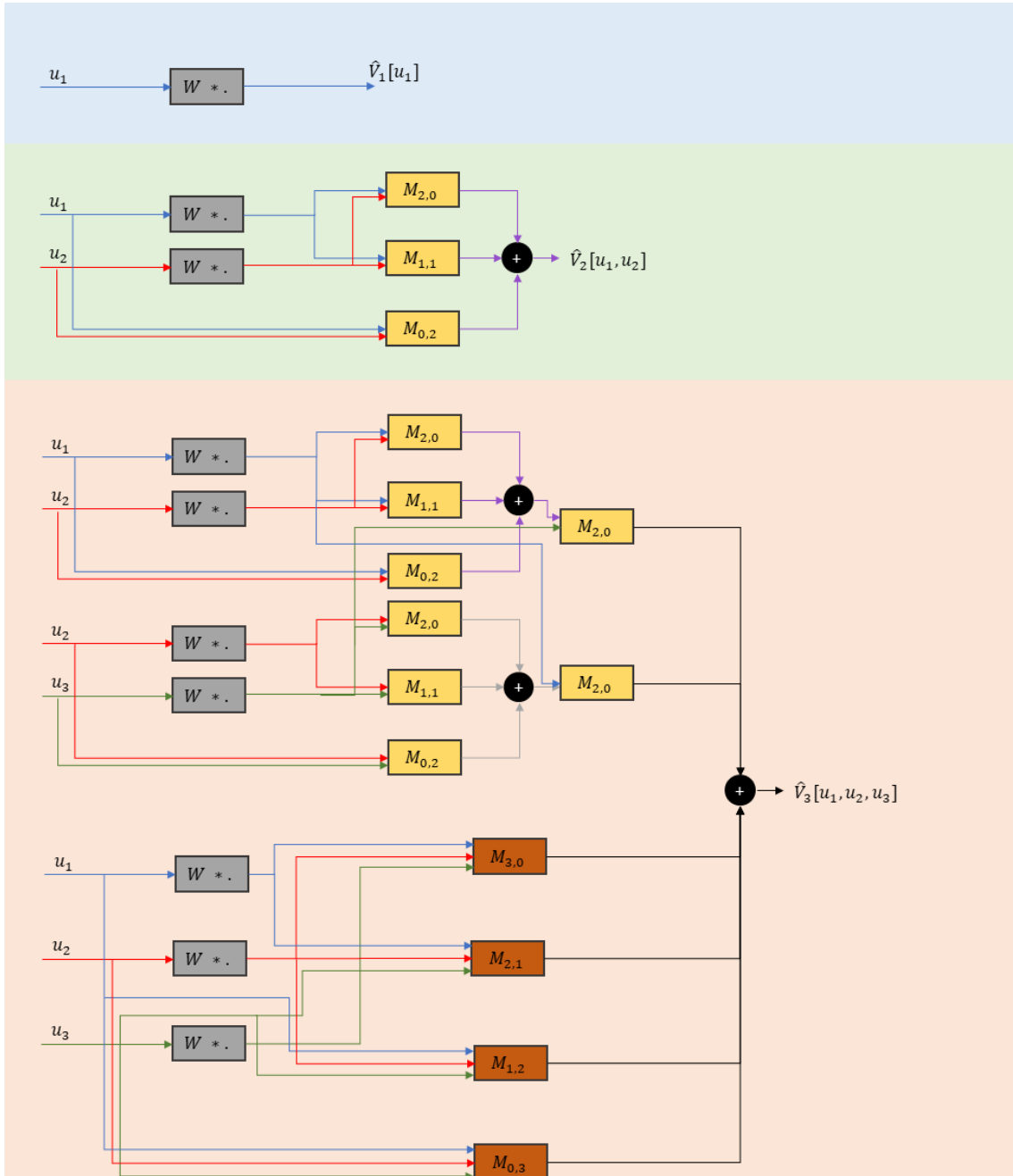


Figure 4.3: Schema de réalisation des opérateurs de Volterra multi-entrée mono-sortie pour une série tronquée à l'ordre 3

Un exemple de reconstitution de 6 signaux homophases séparés par méthode HPS à partir du résultat d'une simulation **pyPHS**, avec  $N = 6$ ,  $P = P_{min} = 13$  est donné en figure 4.4. On observe naturellement que plus les ordres de déphasage sont élevés, moins bonne est la reconstitution du signal homophase associé (à cause du degré de troncature de la série)

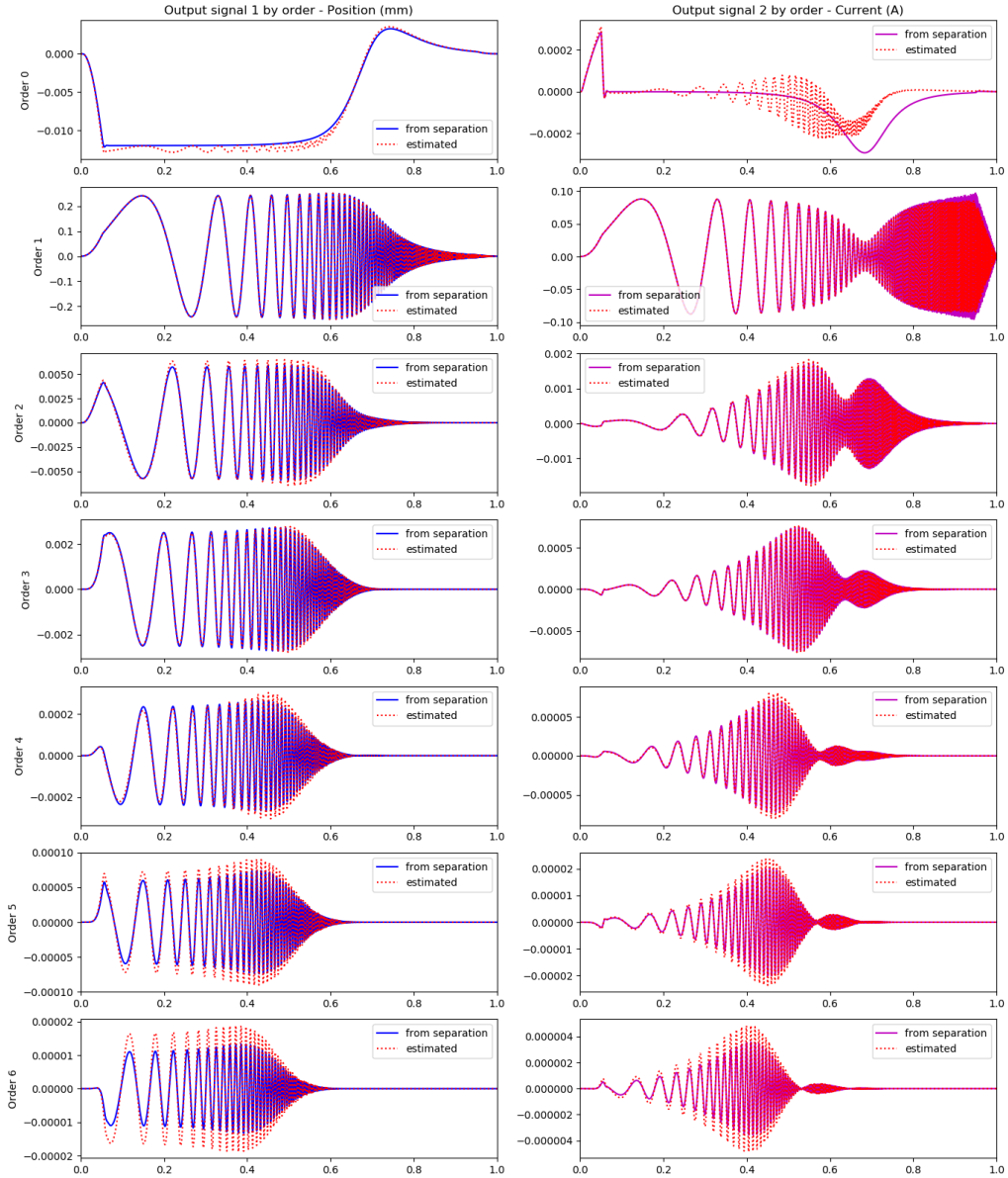


Figure 4.4: Signaux homophases en position et courant séparés (trait plein, bleu et magenta) après simulation numérique, et resimulés d'après le schéma de réalisation par opérateurs de Volterra multi-entrée mono-sortie (trait pointillé en rouge)

### 4.3 Calcul de distorsion harmonique et visualisations

#### Etat de l'art

Les pratiques actuelles pour calculer le THD d'un système se basent sur l'analyse spectrale de la réponse du système à une excitation de type :

- **Sinusoidale**, on parle alors de *stepped-sine measurements* car on envoie  $K$  signaux sinusoïdaux à la suite, pour obtenir une quantité discrète  $K$  de spectres de Fourier de réponses. On calcule alors pour chaque signal de fondamentale  $\omega_k, k \in [1, \dots, K]$  la contribution harmonique de rang  $n$  en pointant directement sur le spectre le point de fréquence  $n\omega_k$ .
- **Sweep**, on effectue l'approximation que pour un sweep de fréquence instantanée  $\omega(t)$  variant très lentement dans le temps, on peut effectuer à divers instants une transformée de Fourier avec une fenêtre d'analyse adaptative  $[\omega_1(t), \omega_2(t)]$  centrée autour de  $\omega(t_1)$  et pointer les harmoniques sur le spectre en considérant le sweep comme une sinusoïdale de fréquence fixe.

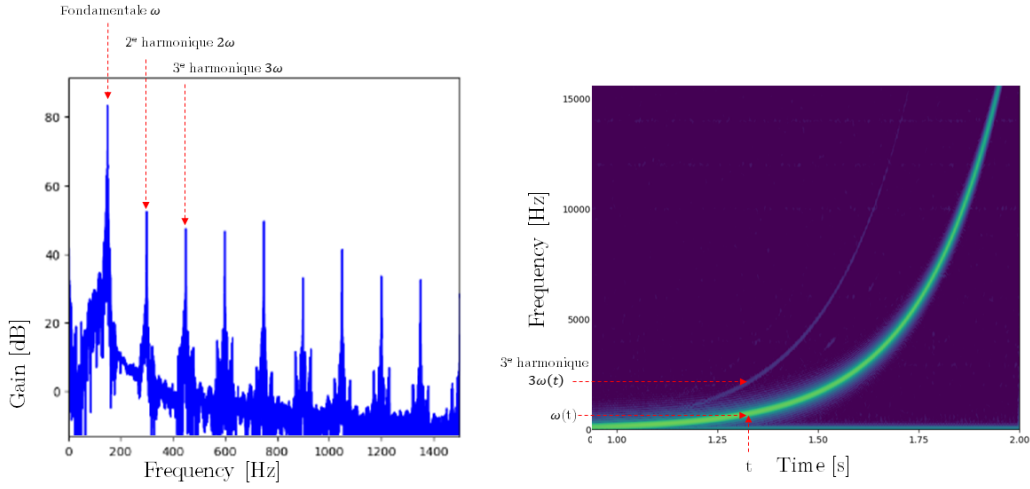


Figure 4.5: Pointage des harmoniques sur spectre de Fourier ou spectrogramme

Notre objectif est d'élargir la gamme de signaux possibles pour l'étude du contenu harmonique de la réponse du système, la seule contrainte étant qu'il excite toute la gamme de fréquence sur laquelle on veut étudier le système : on pourra prendre par exemple un sweep exponentiel à enveloppe sinusoïdale sans s'inquiéter de la vitesse de balayage, et on pourrait prendre tout autre signal "riche en fréquences".

#### Définition des grandeurs à visualiser

Puisque notre méthode permet de calculer les coefficients  $d_p(\omega)$  pour toute fréquence  $\frac{\omega}{2\pi}$  et tout rang  $p$  inférieur à l'indice de troncature  $N_{crop}$  imposé par le calcul des signaux homophases, on a accès à l'amplitude de chaque harmonique créée sur tout le spectre considéré. On peut en conséquence choisir de visualiser à la fois le Taux Harmonique de Distorsion (objectif premier) et les amplitudes absolues et relatives de chaque harmonique. On définit alors :

- L'amplitude **absolue** de l'harmonique de rang  $p, p \in \mathbb{N}^*$  à la pulsation  $\omega$  par :

$$A_p(\omega) = |\mathcal{TF}[\Psi_p](\omega)| \quad (4.10)$$

- L'amplitude **relative** de l'harmonique de rang  $p, p \in \mathbb{N}^*$  à la pulsation  $\omega$  par :

$$\tilde{A}_p(\omega) = \frac{|\mathcal{TF}[\Psi_p](\omega)|}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N_{crop}} |\mathcal{TF}[\Psi_n](\omega)|^2}} \quad (4.11)$$

- Le Taux Harmonique de Distorsion par :

$$\mathcal{T} = \sum_{n=2}^{N_{crop}} \frac{|\mathcal{TF}[\Psi_n](\omega)|^2}{|\mathcal{TF}[\Psi_1](\omega)|^2} \quad (4.12)$$

#### Preuve de 4.10, 4.11, 4.12 dans le cas d'une excitation sinusoïdale

En passant l'équation 4.7 dans le domaine de Fourier, on obtient immédiatement, que pour un signal d'excitation harmonique de fondamentale  $\omega$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\mathcal{TF}[\Psi_p](\omega) = d_p$$



L'amplitude de l'harmonique de rang  $p$  est alors donnée par 4.10 en prenant le module de l'équation précédente. On obtient également de cette manière le lien entre les 2 expressions du THD données en 4.6 et 4.12

Un des objectifs qui nous préoccupe est de visualiser l'augmentation de la part relative des non-linéarités avec l'augmentation du niveau d'entrée du signal d'excitation du système. Pour cela, on souhaite obtenir - pour  $Z$  la transformée de Fourier d'une des grandeurs définies en 4.10, 4.11, 4.12 - la visualisation de  $Z = \phi(u_{in}, \omega)$  où  $u_{in}$  est le niveau d'entrée du signal d'excitation, et  $\omega$  la pulsation considérée.

Pour cela on utilisera 2 types de graphe :

- Un graphe en 3 dimensions, avec pour axes  $\{x : u_{in}, y : \omega, z : Z\}$
- Un graphe en 2 dimensions, avec une courbe  $Z = \phi_{u_{in}}(\omega)$  pour chaque amplitude  $u_{in}$  considérée

## 4.4 Résultats

### 4.4.1 Résultats sur système simulé

On a simulé le système décrit en 3.2 avec une structure de Système Hamiltonien à Ports, à l'aide de la librairie *Python* dédiée **pyPHS**, et après séparation en signaux homophases par méthode HPS pour  $N=10$ , et calcul des différentes amplitudes on obtient les figures visibles en annexe C pour :

- Un sinus de fréquence 200Hz, signal pauvre en contenu fréquentiel et qui ne permet donc pas de caractériser le comportement harmonique du système à toute fréquence, mais qui permet une visualisation des résultats de la méthode appliquée à ce cas simple. 6 amplitudes entre 1 et 5V ont été utilisées
- Un sweep exponentiel balayant l'intervalle fréquentiel [1, 1000] Hz. 11 amplitudes entre 1 et 5V ont été utilisées

### 4.4.2 Résultats expérimentaux sur haut-parleur de référence et sur prototypes

On a effectué l'étude sur le haut-parleur de référence F, en utilisant 3 *sweep* exponentiels à enveloppe sinusoidale, balayant l'intervalle fréquentiel [1, 2000] Hz, et d'amplitudes respectives 0.7V, 1.4V et 2.1V. On a mesuré 3 grandeurs : courant, position et pression, et tracé les amplitudes absolues et relatives de chaque harmonique jusqu'à  $n = 3$ , ainsi que la figure de Taux Harmonique de Distorsion, en fonction de la fréquence, pour chaque amplitude. Les résultats sont visibles en annexe D.

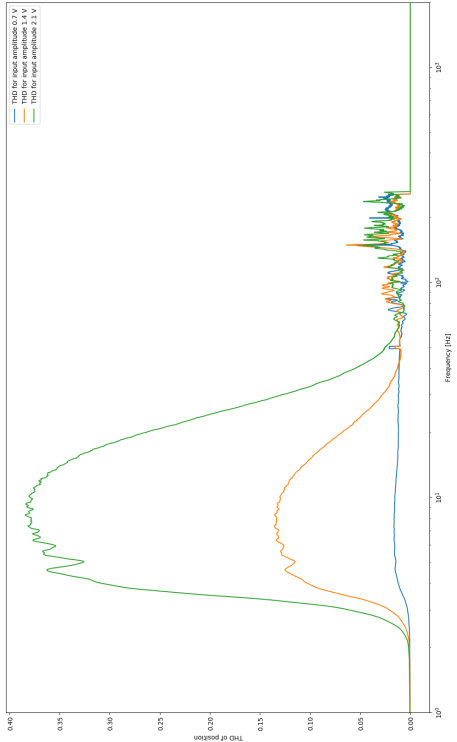
On a également effectué cette mesure pour V, cette fois pour 5 niveaux d'entrée différents entre 0.7V et 3.5V. Les résultats sont visibles en annexe F. On observe l'influence de ce que l'on suppose être les premiers modes propres de la structure (qui doivent être confirmés encore par l'analyse modale en cours), repérés aux fréquences  $f_1 = 20Hz$ ;  $f_2 = 32Hz$  sur le taux de distorsion en position. Ce dernier devient gigantesque (50% à  $f_1 = 20Hz$ ) comparé aux 0.4% à la résonance à  $f_s = 12Hz$  (pour une amplitude d'entrée de 3.5V). Ces pics de distorsion sont principalement issues de l'harmonique de rang 2 puisque à  $f_1 = 20Hz$ , on relève son amplitude relative - par rapport à la fondamentale - autour de 50% (contre 15% pour l'harmonique de rang 3).

### 4.4.3 Comparaisons et discussion

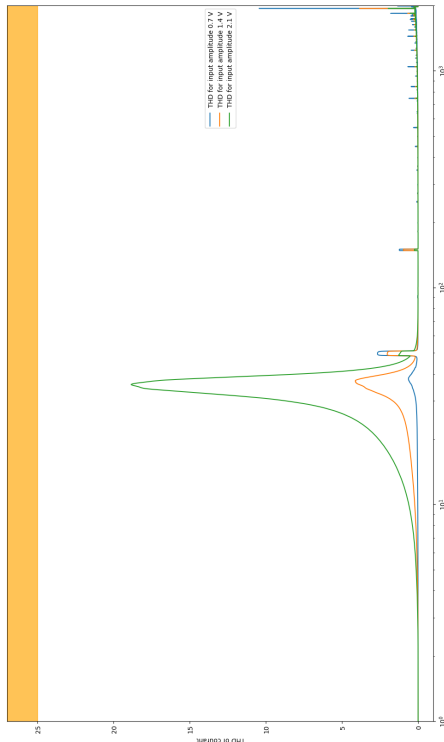
On compare ici les résultats obtenus sur système simulé et sur système réel pour discuter des performances de la méthode de calcul de distorsion harmonique.

Etant donnés les profils harmoniques présentés ci-avant, nous avons voulu comparer nos approches sur des systèmes aussi proches que possible : c'est pourquoi nous avons choisi de garder les résultats expérimentaux de 4.4.2 et de simuler le système du haut-parleur comme dans 4.4.1 à l'aide des paramètres non linéaires identifiés par le processus itératif décrit lors de notre étude expérimentale 3.5. Les résultats sont confrontés en table 1.

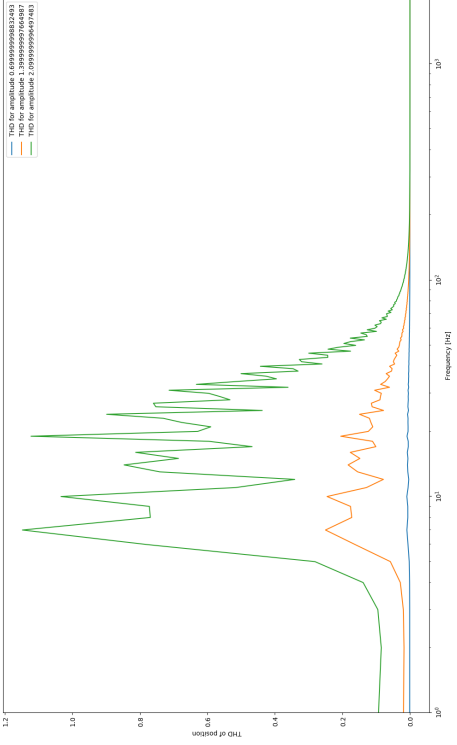
Si on observe que les allures des courbes sont globalement comparables, avec une distorsion maximale à la résonance ( $f_s = 39.5Hz$ ) en ce qui concerne le courant, et autour de cette résonance pour la réponse en position, leurs amplitudes diffèrent parfois significativement selon l'amplitude du signal d'entrée. En



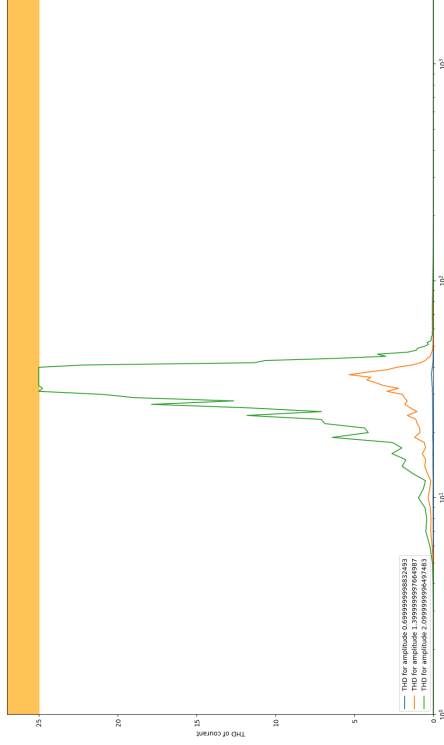
THD sur la réponse en position sur haut-parleur F



THD sur la réponse en courant sur haut-parleur F

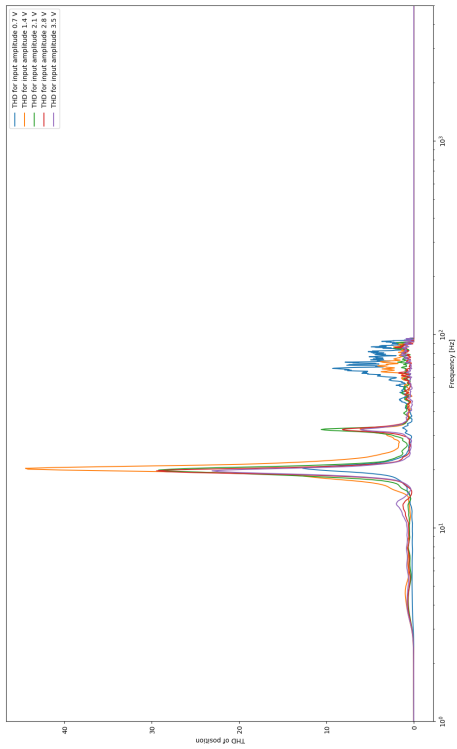


THD sur la réponse en position sur modèle simulé de F

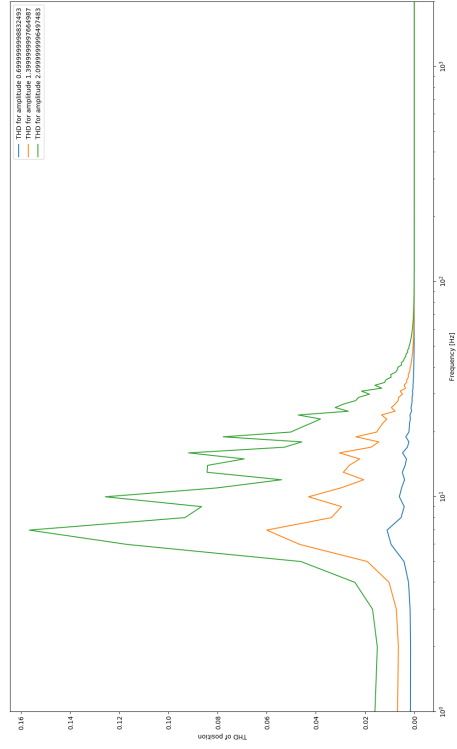


THD sur la réponse en courant sur modèle simulé de F

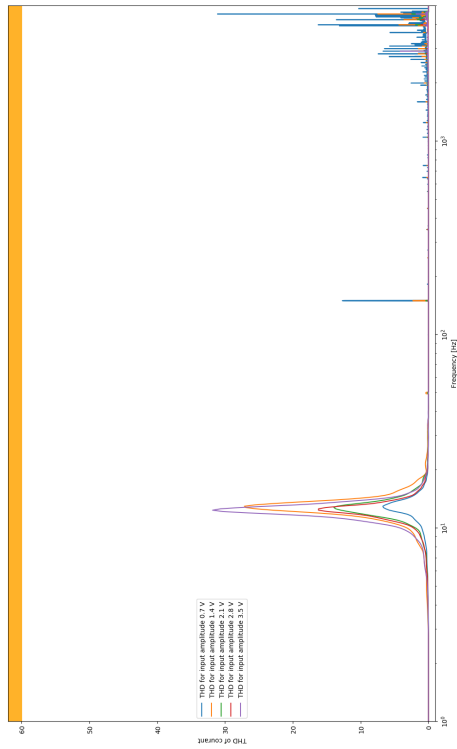
Table 1: Comparaison des figures de THD sur le haut-parleur F, estimées par simulation et expérimentalement



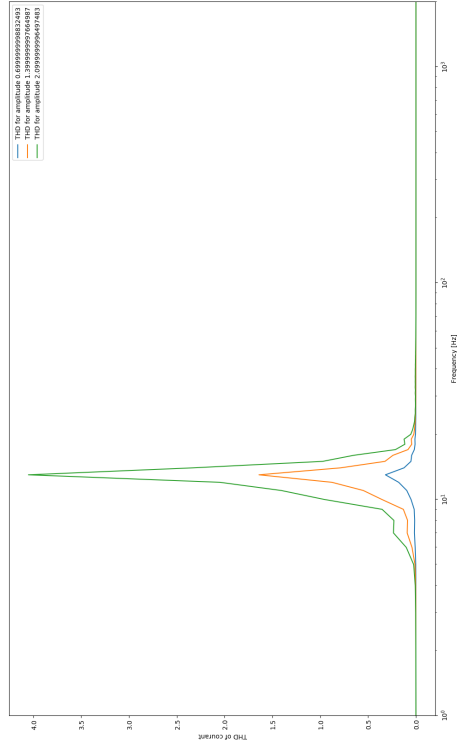
THD sur la réponse en position sur haut-parleur V



THD sur la réponse en position sur modèle simulé de V



THD sur la réponse en courant sur haut-parleur V



THD sur la réponse en courant sur modèle simulé de V

Table 2: Comparaison des figures de THD sur le haut-parleur V, estimées par simulation et expérimentalement

effet, pour une amplitude d'entrée de  $1.4V$  on observe des courbes expérimentales et simulée qui coïncident relativement bien en allure et en amplitude. En revanche pour l'amplitude d'entrée  $2.1V$  par exemple, le THD en courant de la simulation devient gigantesque (coupé sur la figure mais le pic monte jusqu'à 75% à la résonance) Ceci est probablement dû à une identification trop mauvaise des paramètres non linéaires d'ordre élevé : on observait en effet en 3.6 que les ordres homogènes de non-linéarité n'étaient correctement reconstruits que jusque l'ordre 5, avec déjà des différences d'amplitude perceptibles pour les ordres inférieurs.

On a également tenté de reproduire cette comparaison avec le haut-parleur **V** et son alter ego simulé : malheureusement, les simulations donnaient des résultats tout à fait incohérents pour des amplitudes d'entrée supérieures à  $3V$ , on s'est donc contenté de représenter les résultats de simulation pour les amplitudes  $0.7V$ ,  $1.4V$  et  $2.1V$ . Cette fois-ci, les distorsions comparées ne sont pas du tout proches : on retrouve dans les résultats de la simulation des distorsions observées à la résonance à  $f_s = 12Hz$ , avec des amplitudes notablement différentes à celles prises sur l'expérience sur le haut-parleur (Pour l'amplitude  $2.1V$ , on récupère 0.16% de distorsion en position pour la simulation et 0.6% pour l'expérience ; et 4% de distorsion en courant pour la simulation contre 29% pour l'expérience). De plus, on n'observe pas sur la simulation les distorsions importantes à  $f_1 = 20Hz$ ;  $f_2 = 32Hz$  en position, dont l'origine est attribuée aux premiers modes propres de la structure. Ce dernier point reste logique étant donnée l'incapacité du modèle de simulation à reproduire les phénomènes non introduits comme la forte mobilité de la structure sur laquelle se fixe la membrane de la Vertex.

**Remarque 4.2.** *Dans un cadre expérimental, le calcul des grandeurs "relatives" (harmonique relative  $\tilde{A}_p$ , et THD  $T$ ) implique des divisions par des signaux dont le rapport signal-sur-bruit est trop faible (particulièrement dans les hautes fréquences) pour être significatif. Par conséquent on a tenté de mettre en place :*

- Une détection de seuil de bruit afin de couper le calcul sur les fenêtres fréquentielles où le signal n'était plus significatif (en multipliant le signal au dénominateur par un facteur important).
- Une borne supérieure pour le tracé des grandeurs relatives (autour de 30 % en général).

*La contrepartie de ce souci de visualisation est que certaines parties du contenu harmonique sont parfois inaccessibles.*

## 5 Contributions et conclusion générale

### 5.1 Réponse aux objectifs

On a essayé de répondre au mieux aux objectifs affichés en 1.1.1, on a en particulier estimé la directivité des prototypes, et estimé leurs paramètres grâce à la méthode introduite par Damien Bouvier, ce qui a permis de répondre notamment à la question de la linéarité des dispositifs. On n'a en revanche pas précisé la modélisation du haut-parleur plus en avant que le modèle proposé en 3.2, par manque de temps et de compréhension des rôles de la structure de la Vertex, de la membrane et de sa suspension. La suspension en particulier semblait très complexe à étudier puisque elle était composée d'un pli de la membrane, collé à une bague d'aluminium elle-même fixée par des blocs de néoprène au renfort d'aile (voir les éléments en annexe A. Cette complexité a rendu ardue la recherche de conditions aux limites pour l'analyse modale de la structure et autres études menées en parallèle sur plusieurs stages.

On aura au total effectué des mesures et des ajustements sur 3 modèles de Vertex **V** et 3 modèles de Panneau de grave **P**, et rédigé des rapports de mesure en conséquence.

D'un autre côté, on a plus mis en avant l'utilisation des signaux homophases dans la caractérisation du contenu harmonique de la réponse du haut-parleur, ce qui n'était pas un objectif au départ.

### 5.2 Remarques générales sur le haut-parleur Vertex

Les résultats obtenus pour le haut-parleur construit par Voxline permettent de se rendre compte quantitativement de l'importance des non-linéarités dans la réponse de ce type de haut-parleur par rapport à un

modèle électrodynamique standard comme F.

On a observé en particulier une grande importance des ordres pairs de non-linéarité, que l'on a expliqué par le fonctionnement asymétrique de la membrane. De plus, les membranes et la structure étant très mobiles, on a commencé à observer l'importance de modes propres de membrane, de plaque, de torsion... dans la réponse du haut-parleur.

De ces particularités émergent un timbre unique et très marqué, un rendu des voix et percussions particulier (sensation de proximité de la source dans le champ sonore), mais également par moments des duretés dans certains impacts, de piano par exemple.

Le comportement directif très proche de celui du dipôle acoustique - à l'exception de cette cission du lobe principal de rayonnement dans la bande de fréquences  $[1000Hz, 2000Hz]$  permet d'obtenir une source sonore difficile à localiser, et lorsque l'on combine 2 de ces hauts-parleurs on obtient un champ d'écoute très uniforme (à l'exception de l'axe formé par les directions extrêmes  $\pm 90^\circ$ ).

On suivra avec attention le développement des prototypes afin de comprendre au mieux le fonctionnement des hauts-parleurs et tenter de proposer des améliorations par la suite, en souhaitant tout le meilleur à leurs fabricants de la société Voxline !

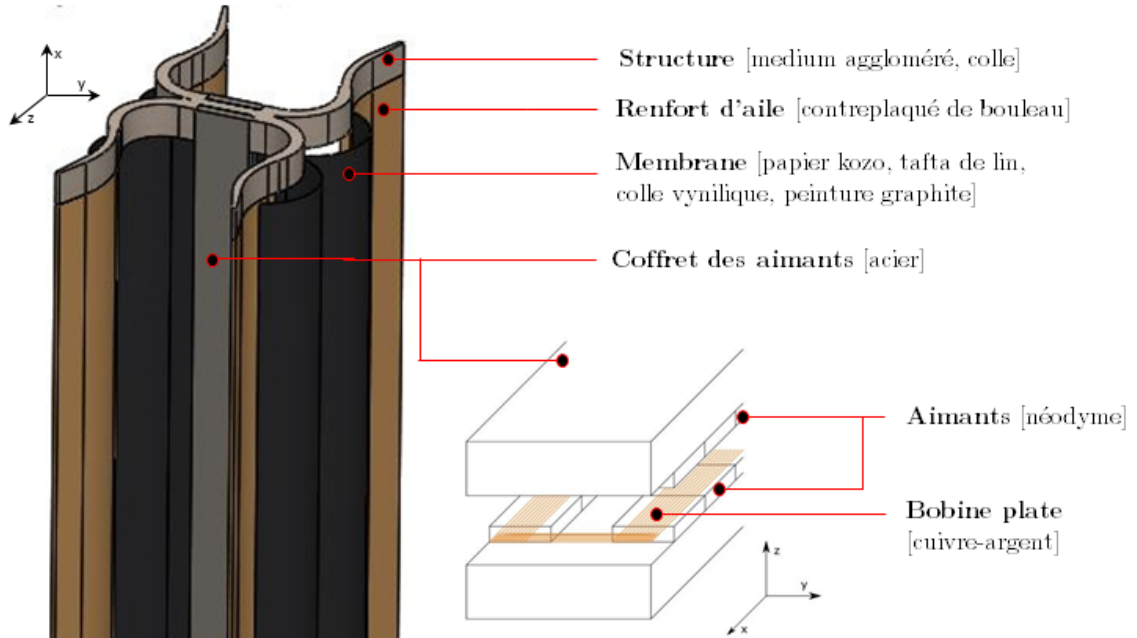
## References

- [1] Damien Bouvier.  
*Identification de systèmes non linéaires représentables en séries de Volterra: applications aux systèmes sonores.*
- [2] Martin Hasler.  
*Phénomènes non linéaires*  
Chapitre 3: Séries de Volterra
- [3] Thomas Hélie.  
*Modélisation physique d'instruments de musique et de la voix : Systèmes dynamiques, problèmes directs et inverses*  
Section 2: Systèmes dynamiques entrée-sortie
- [4] Arthur W. Leissa.  
*Vibration of Plates.*
- [5] Antoine Falaize, Thomas Helie.  
*Passive modelling of the electrodynamic loudspeaker : from the Thiele-Small model to nonlinear Port-Hamiltonian Systems, 2018.*
- [6] Thomas Helie.  
*Systèmes Hamiltoniens à ports et simulation à passivité garantie, 2016.*
- [7] Wolfgang Klippel.  
*Sound Quality of Audio Systems, 2018.*  
Course on Audio Systems, Technische Universität Dresden
- [8] Andrzej Dobrucki, Benoit Merit, Valérie Lemarquand, Guy Lemarquand.  
*Modeling of the nonlinear distortion in electrodynamic loudspeakers caused by the voice-coil inductance*  
10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France
- [9] Romain RAVAUD, Guy LEMARQUAND, Valérie LEMARQUAND, Tangi ROUSSEL  
*Ranking of the Nonlinearities of Electrodynamic Loudspeakers*
- [10] W. Klippel, U. Seidel  
*Fast and Accurate Measurement of Linear Transducer Parameters*  
Klippel GmbH, Germany
- [11] Walter Gautschi and Gabriele Inglese  
*Lower Bounds for the Condition Number of Vandermonde Matrices*
- [12] Berman, Lihu and Feuer, Arie. (2007)  
*On perfect conditioning of Vandermonde matrices on the unit circle,*  
Electronic Journal of Linear Algebra, Volume 16.
- [13] Pep Gil-Cacho, Toon van Waterschoot, Marc Moonen, Soren Holdt Jensen. (2009)  
*Study and characterization of odd and even nonlinearities in electrodynamic loudspeakers.*  
Audio Engineering Society Convention Paper 7841



## 6 Annexes

### Annexe A : Présentation du haut-parleur "Vertex" construit par Voxline



V O X | I N E



Vertex et Panneau de grave ainsi que leur électronique associée (DAC, Amplificateur)



## Annexe B : Recherche de lien entre harmoniques et signaux homophases dans le cadre d'une excitation périodique

Soit  $V$  une série de Volterra et  $u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{jk\omega t}$  un signal d'entrée périodique, et  $r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k e^{jk\omega t}$  sa partie réelle. On recherche ici une combinaison linéaire permettant d'exprimer le signal homophase d'ordre  $p$  comme la contribution du système à l'harmonique de rang  $p$ . On recherche donc un ensemble d'indices  $\mathcal{A}_p$  et des coefficients associés  $\alpha_{p,l}, l \in \mathcal{A}_p$  (que l'on devine être égaux à 1), tels que :

$$\psi_p(t) = \sum_{l \in \mathcal{A}_p} \alpha_{p,l} d_{pl} e^{jpl\omega t} \quad (6.1)$$

La relation entre les coefficients des séries de Fourier des 2 signaux  $u$  et  $r$  est :

$$r_k = \frac{u_k + \overline{u_{-k}}}{2}$$

Commençons par calculer le signal homophase de rang  $p$  :

$$\begin{aligned} \psi_p(t) &= \sum_{\substack{n \geq |p| \\ n \bmod p[2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} V_n \left[ \underbrace{u(t), \dots, u(t)}_{\frac{n+p}{2}}, \underbrace{\overline{u}(t), \dots, \overline{u}(t)}_{\frac{n-p}{2}} \right] \\ &= \sum_{\substack{n \geq |p| \\ n \bmod p[2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau) \underbrace{\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} u_{k_1} e^{jk_1 \omega t} e^{-jk_1 \omega \tau_1} \dots \sum_{k_{\frac{n+p}{2}} \in \mathbb{Z}} u_{k_{\frac{n+p}{2}}} e^{jk_{\frac{n+p}{2}} \omega t} e^{-jk_{\frac{n+p}{2}} \omega \tau_{\frac{n+p}{2}}}}_{\frac{n+p}{2}} \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\sum_{k_{\frac{n+p}{2}+2} \in \mathbb{Z}} \overline{u}_{k_{\frac{n+p}{2}+2}} e^{-jk_{\frac{n+p}{2}+2} \omega t} e^{+jk_{\frac{n+p}{2}+2} \omega \tau_{\frac{n+p}{2}+2}} \dots \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \overline{u}_{k_n} e^{-jk_n \omega t} e^{+jk_n \omega \tau_n}}_{\frac{n-p}{2}} d\tau \right] \\ &= \sum_{\substack{n \geq |p| \\ n \bmod p[2]}} \frac{\binom{n}{\frac{n-p}{2}}}{2^n} \left[ \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \underbrace{u_{k_1} \dots u_{k_{\frac{n+p}{2}}}}_{\frac{n+p}{2}} \underbrace{\overline{u}_{k_{\frac{n+p}{2}+2}} \dots \overline{u}_{k_n}}_{\frac{n-p}{2}} e^{j(k_1 + \dots + k_{\frac{n+p}{2}} - k_{\frac{n+p}{2}+2} - \dots - k_n) \omega t} \right. \\ &\quad \left. H_n \left( \underbrace{jk_1 \omega, \dots, jk_{\frac{n+p}{2}} \omega}_{\frac{n+p}{2}}, \underbrace{-jk_{\frac{n+p}{2}+2} \omega, \dots, -jk_n \omega}_{\frac{n-p}{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

A ce moment, il convient de faire le changement de variable  $n = 2m + p$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi_p(t) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[ \frac{\binom{2m+p}{m}}{2^{2m+p}} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_{2m+p} \in \mathbb{Z}} \underbrace{u_{k_1} \dots u_{k_{m+p}}}_{m+p} \underbrace{\overline{u}_{k_{m+p+1}} \dots \overline{u}_{k_{2m+p}}}_m e^{j(k_1 + \dots + k_{m+p} - k_{m+p+1} - \dots - k_{2m+p}) \omega t} \right. \\ &\quad \left. H_n \left( \underbrace{jk_1 \omega, \dots, jk_{m+p} \omega}_{m+p}, \underbrace{-jk_{m+p+1} \omega, \dots, -jk_{2m+p} \omega}_m \right) \right] \end{aligned}$$

Du côté de  $d_k$  maintenant :

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \dots + k_n = k}} \underbrace{r_{k_1} \dots r_{k_n}}_n H_n(\underbrace{jk_1\omega, \dots, jk_n\omega}_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \dots + k_n = k}} \frac{1}{2^n} \underbrace{(u_{k_1} + \bar{u}_{-k_1}) \dots (u_{k_n} + \bar{u}_{-k_n})}_n H_n(\underbrace{jk_1\omega, \dots, jk_n\omega}_n) \end{aligned}$$

On écrit  $e^{jk\omega t} = e^{j(k_1 + \dots + k_n)\omega t}$  afin de reformer la combinatoire :

$$d_k e^{jk\omega t} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \dots + k_n = k}} (u_{k_1} + \bar{u}_{-k_1}) e^{jk_1\omega t} \dots (u_{k_n} + \bar{u}_{-k_n}) e^{jk_n\omega t} H_n(jk_1\omega, \dots, jk_n\omega)$$

On développe ensuite le produit des coefficients selon :

$$\prod_{s=1}^n (u_{k_s} + \bar{u}_{-k_s}) = \sum_{s=0}^n \sum_{\substack{\sigma_1 \in \mathbb{S}(s) \\ \sigma_2 \in \mathbb{S}(n-s)}} \underbrace{u_{k_{\sigma_1(1)}} \dots u_{k_{\sigma_1(s)}}}_s \underbrace{\bar{u}_{-k_{\sigma_2(s+1)}} \dots \bar{u}_{-k_{\sigma_2(n)}}}_{n-s}$$

où  $\mathbb{S}(s)$  est l'ensemble des permutations dans l'ensemble  $\{1, \dots, s\}$  et  $\mathbb{S}(n-s)$  est l'ensemble des permutations dans l'ensemble  $\{s+1, \dots, n-s\}$ . Le terme d'indice  $s=0$  dans la somme est le produit  $u_{k_1} \dots u_{k_n}$  et le terme d'indice  $s=n$  le produit  $\bar{u}_{-k_1} \dots \bar{u}_{-k_n}$ .

On obtient alors :

$$d_k e^{jk\omega t} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \dots + k_n = k}} e^{jk_1\omega t} \dots e^{jk_n\omega t} H_n(jk_1\omega, \dots, jk_n\omega) \sum_{s=0}^n \sum_{\substack{\sigma_1 \in \mathbb{S}(s) \\ \sigma_2 \in \mathbb{S}(n-s)}} \underbrace{u_{k_{\sigma_1(1)}} \dots u_{k_{\sigma_1(s)}}}_s \underbrace{\bar{u}_{-k_{\sigma_2(s+1)}} \dots \bar{u}_{-k_{\sigma_2(n)}}}_{n-s}$$

## Etape actuelle

On voudrait invoquer le même argument de combinatoire qu'en ?? pour ne garder pour la première somme que l'ensemble d'indices  $\{n \in \mathbb{N} / n \geq |p|, \text{ et } n \bmod p [2]\}$ , et rassembler les termes pour obtenir la même expression que  $\psi_p$ .

On peut alors faire deux changements de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2m + p \\ \underbrace{(k_1, \dots, k_{m+p})}_{m+p}, \underbrace{(k_{m+p+1}, k_{2m+p})}_m \rightarrow \underbrace{(k_1, \dots, k_{m+p})}_{m+p}, \underbrace{(-k_{m+p+1}, -k_{2m+p})}_m \end{array} \right.$$

afin d'obtenir une séparation des sommes selon les sous-ensembles d'indices suivants :

$\{k_1, \dots, k_{m+p}\}$  et  $\{k_{m+p+1}, \dots, k_{2m+p}\}$  avec la relation suivante toujours valable :  $k_1 + \dots + k_{m+p} - k_{m+p+1} - k_{2m+p} = k$

La combinatoire issue de ces 2 sous-ensembles va rassembler les termes en sous-ensembles de taille  $\binom{2m+p}{m}$ , Reste donc à vérifier que la combinatoire des coefficients  $u_k$  est compatible avec ces changements de sorte que l'on obtienne une égalité du type :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2m+p}{m}}{2^{2m+p}} \left[ \sum_{k_1, \dots, k_{2m+p} \in \mathbb{Z}} \underbrace{e^{jk_1\omega t} \dots e^{jk_{m+p}\omega t}}_{m+p} \underbrace{e^{-jk_{m+p+1}\omega t} \dots e^{-jk_{2m+p}\omega t}}_m \right. \\
& \quad \left. H_{2m+p}(jk_1\omega, \dots, jk_{2m+p}\omega) \underbrace{u_{k_1} \dots u_{k_{m+p}}}_{m+p} \underbrace{\bar{u}_{-k_{m+p+1}} \dots \bar{u}_{-k_{2m+p}}}_m \right] \\
&= e^{jk\omega t} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2m+p}{m}}{2^{2m+p}} \left[ \sum_{k_1, \dots, k_{2m+p} \in \mathbb{Z}} H_{2m+p}(jk_1\omega, \dots, jk_{2m+p}\omega) \right. \\
& \quad \left. \sum_{s=0}^{2m+p} \sum_{\substack{\sigma_1 \in \mathbb{S}(s) \\ \sigma_2 \in \mathbb{S}(2m+p-s)}} u_{k_{\sigma_1(1)}} \dots u_{k_{\sigma_1(s)}} \bar{u}_{-k_{\sigma_2(s+1)}} \dots \bar{u}_{-k_{\sigma_2(2m+p)}} \right] \\
& \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2m+p}{m}}{2^{2m+p}} \left[ \sum_{k_1, \dots, k_{2m+p} \in \mathbb{Z}} \underbrace{e^{jk_1\omega t} \dots e^{jk_{m+p}\omega t}}_{m+p} \underbrace{e^{-jk_{m+p+1}\omega t} \dots e^{-jk_{2m+p}\omega t}}_m \right. \\
& \quad \left. H_{2m+p}(jk_1\omega, \dots, jk_{2m+p}\omega) \underbrace{u_{k_1} \dots u_{k_{m+p}}}_{m+p} \underbrace{\bar{u}_{-k_{m+p+1}} \dots \bar{u}_{-k_{2m+p}}}_m \right] \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_l e^{jlk\omega t} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2m+p}{m}}{2^{2m+p}} \left[ \sum_{k_1, \dots, k_{2m+p} \in \mathbb{Z}} H_{2m+p}(jk_1\omega, \dots, jk_{2m+p}\omega) \right. \\
& \quad \left. \sum_{s=0}^{2m+p} \sum_{\substack{\sigma_1 \in \mathbb{S}(s) \\ \sigma_2 \in \mathbb{S}(2m+p-s)}} u_{k_{\sigma_1(1)}} \dots u_{k_{\sigma_1(s)}} \bar{u}_{-k_{\sigma_2(s+1)}} \dots \bar{u}_{-k_{\sigma_2(2m+p)}} \right]
\end{aligned}$$

où les  $(\alpha_{p,l}, l \in \mathcal{A}_p) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  sont les coefficients qui nous donnerait une combinaison linéaire possible.

## Annexe C : Tracés des figures d'amplitude d'harmonique et THD pour système simulé

Figure 6.1: Réponse du système simulé en courant : 3 premières harmoniques et THD pour un sinus de fréquence  $200Hz$

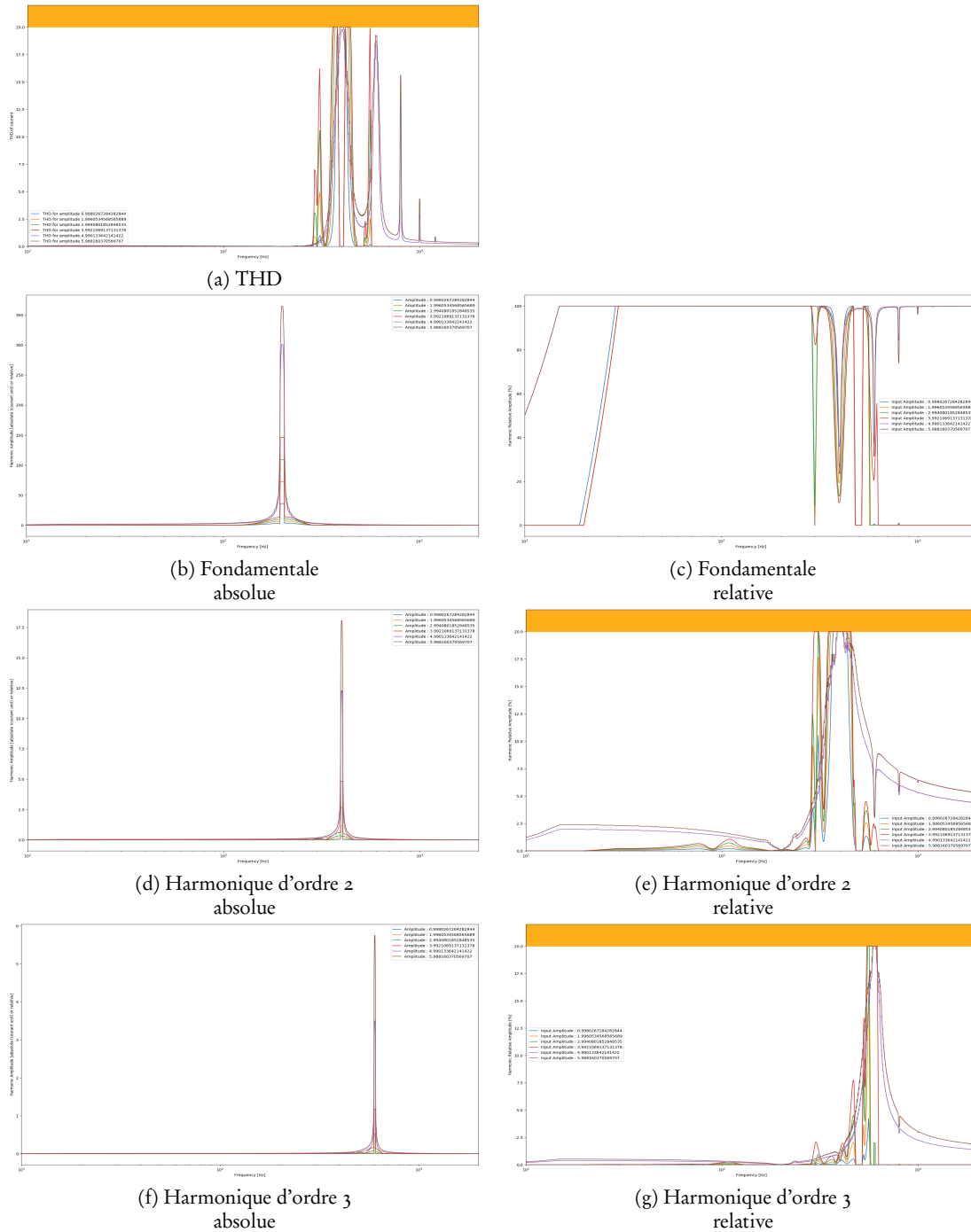
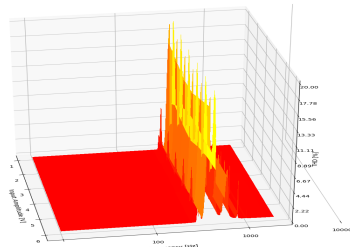
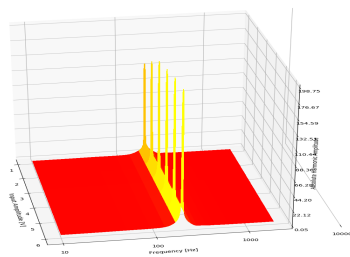


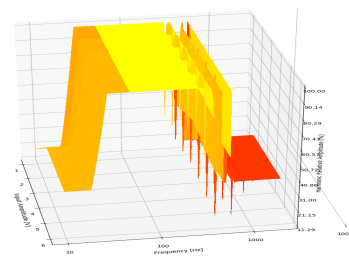
Figure 6.2: Réponse du système simulé en courant : 3 premières harmoniques et THD pour un sinus de fréquence  $200\text{Hz}$



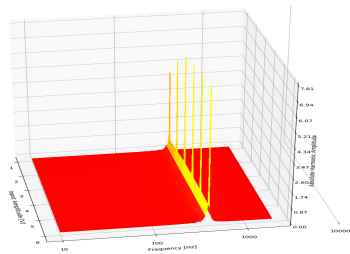
(a) THD



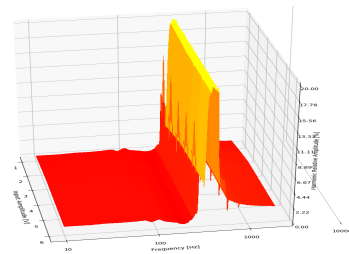
(b) Fondamentale absolue



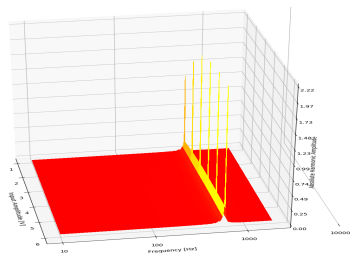
(c) Fondamentale relative



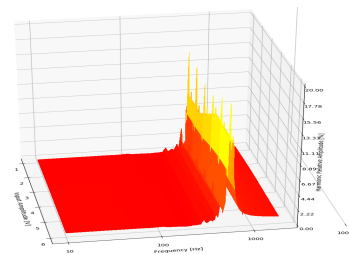
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative



(f) Harmonique d'ordre 3 absolue



(g) Harmonique d'ordre 3 relative

Figure 6.3: Réponse du système simulé en position : 3 premières harmoniques et THD pour un sinus de fréquence  $200\text{Hz}$

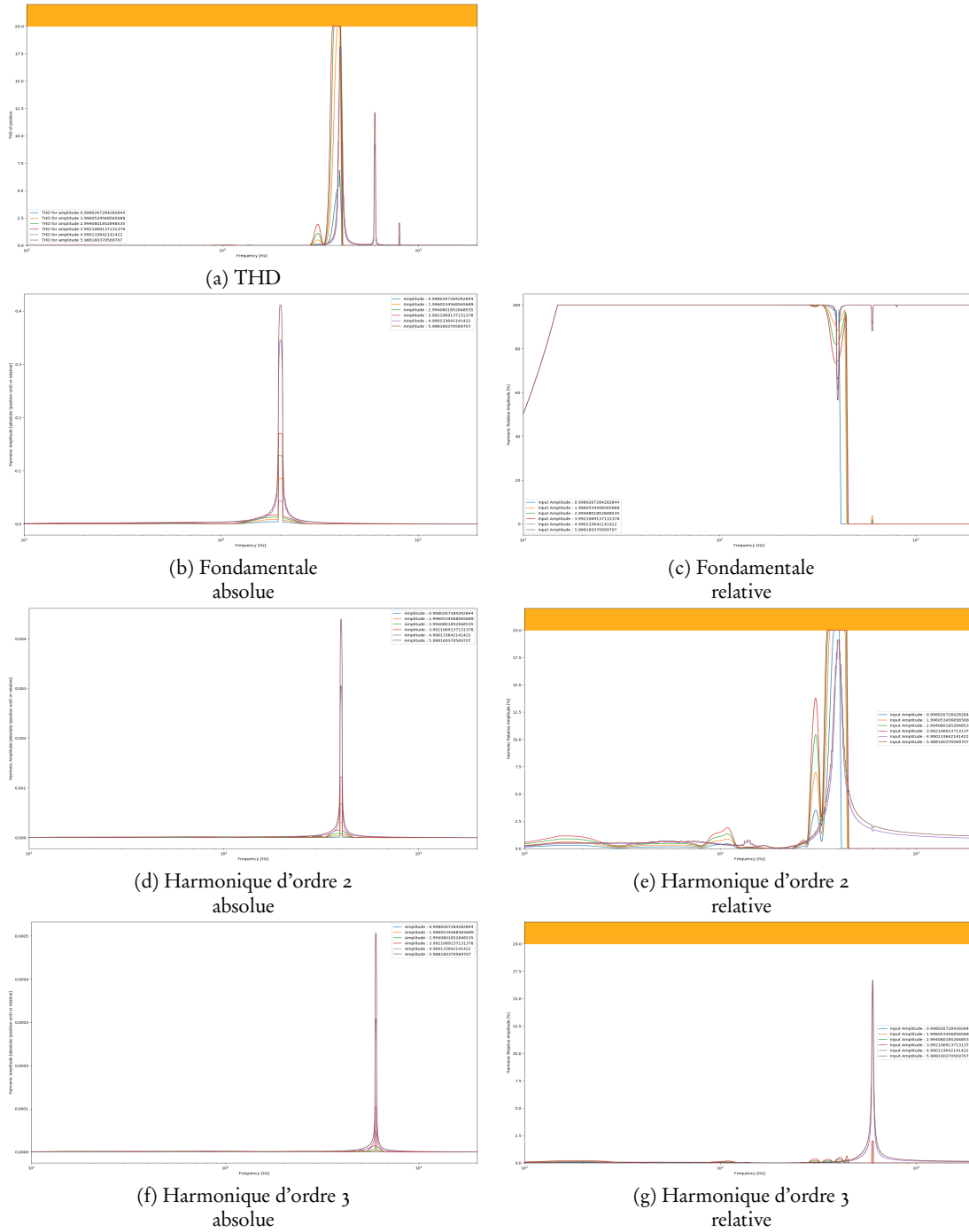
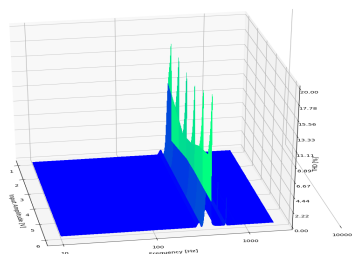
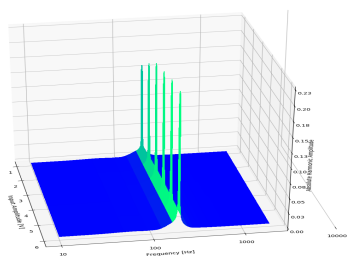


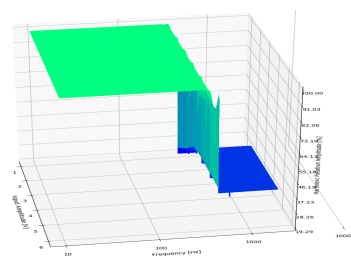
Figure 6.4: Réponse du système simulé en position : 3 premières harmoniques et THD pour un sinus de fréquence  $200\text{Hz}$



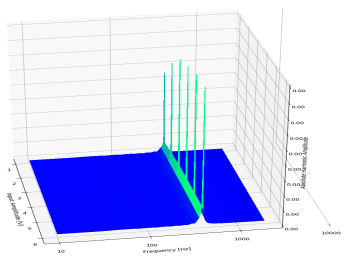
(a) THD



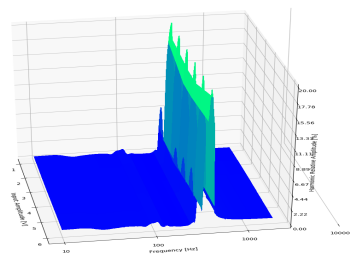
(b) Fondamentale absolue



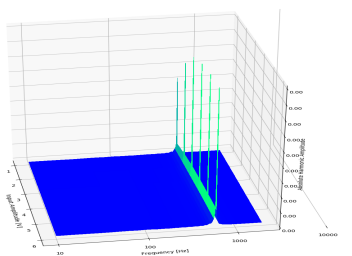
(c) Fondamentale relative



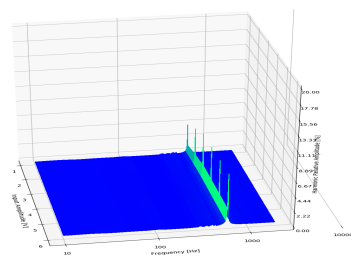
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative

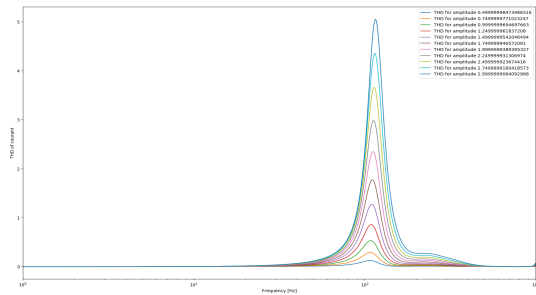


(f) Harmonique d'ordre 3 absolue

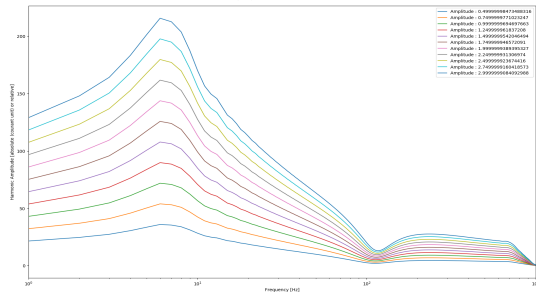


(g) Harmonique d'ordre 3 relative

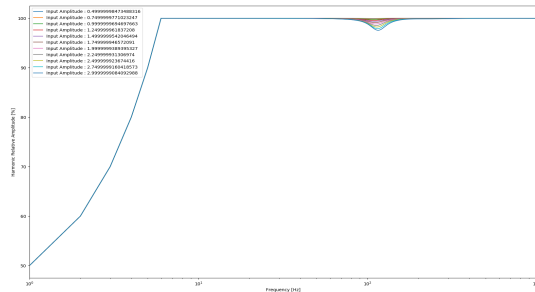
Figure 6.5: Réponse du système simulé en courant : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$



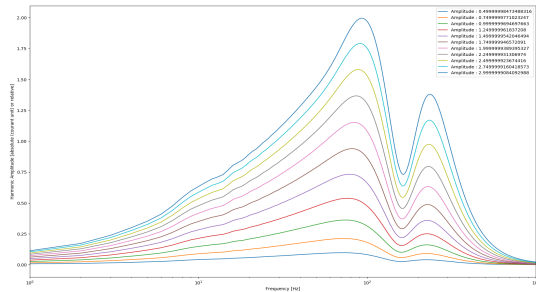
(a) THD



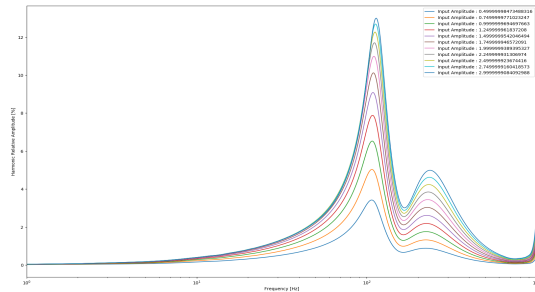
(b) Fondamentale absolue



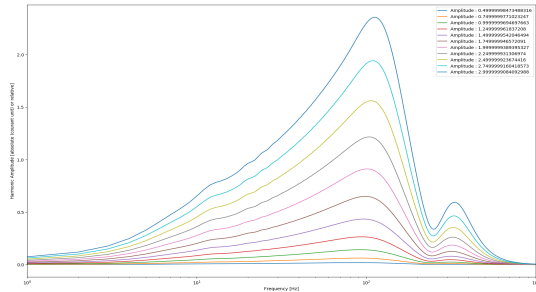
(c) Fondamentale relative



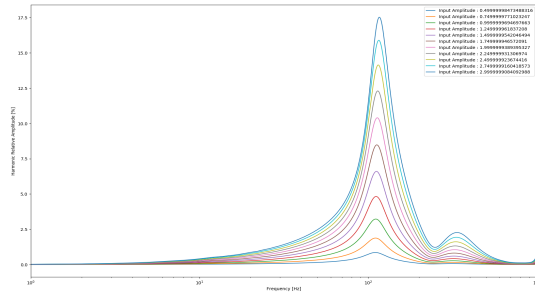
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative



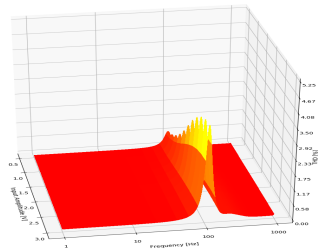
(f) Harmonique d'ordre 3 absolue



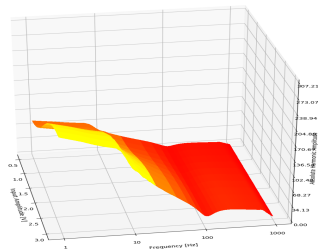
(g) Harmonique d'ordre 3 relative



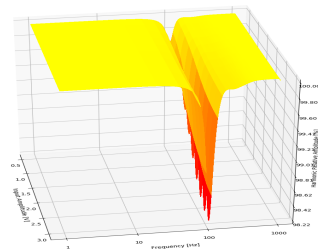
Figure 6.6: Réponse du système simulé en courant : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$



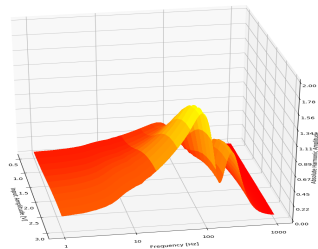
(a) THD



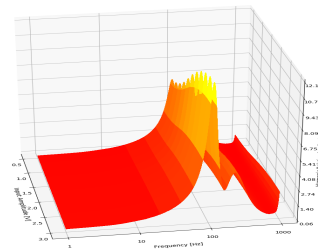
(b) Fondamentale absolue



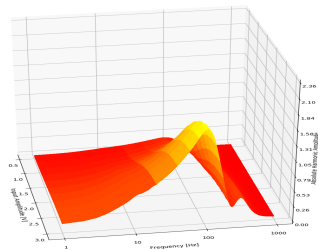
(c) Fondamentale relative



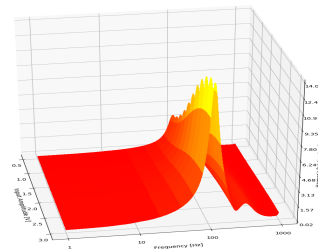
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative

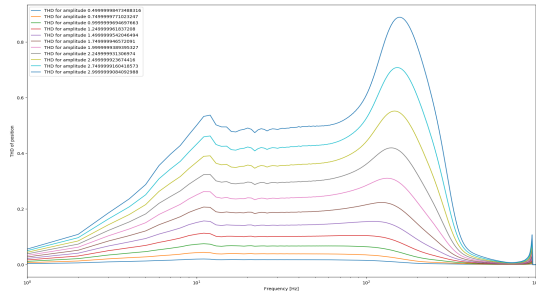


(f) Harmonique d'ordre 3 absolue

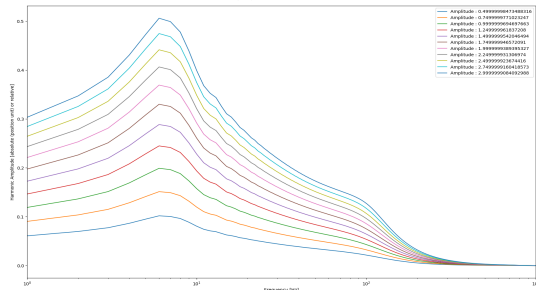


(g) Harmonique d'ordre 3 relative

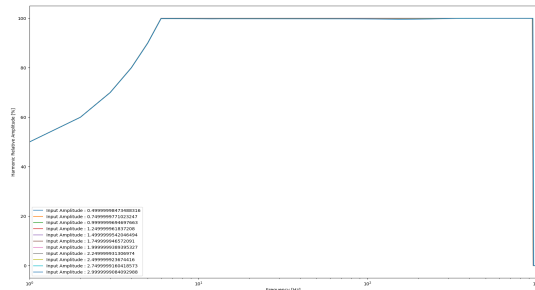
Figure 6.7: Réponse du système simulé en position : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$



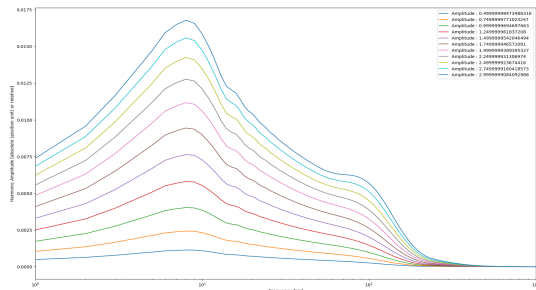
(a) THD



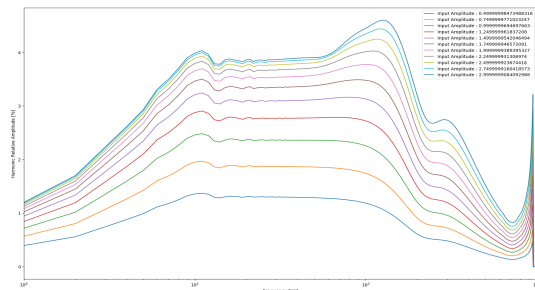
(b) Fondamentale absolue



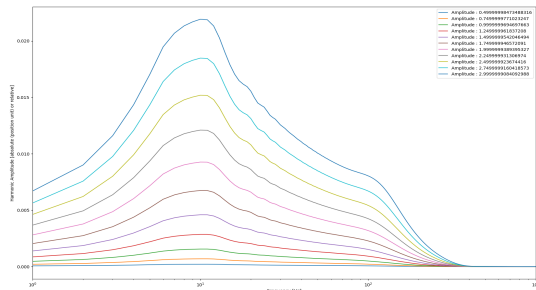
(c) Fondamentale relative



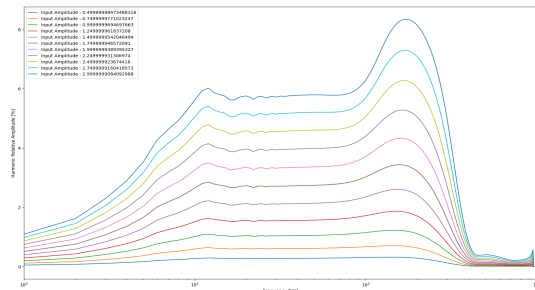
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative

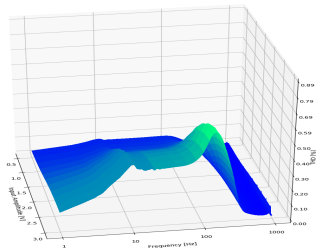


(f) Harmonique d'ordre 3 absolue

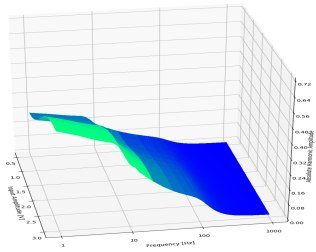


(g) Harmonique d'ordre 3 relative

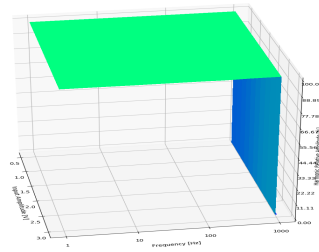
Figure 6.8: Réponse du système simulé en position : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$



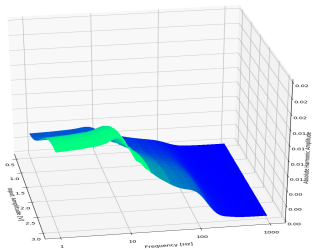
(a) THD



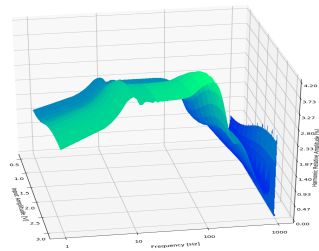
(b) Fondamentale absolue



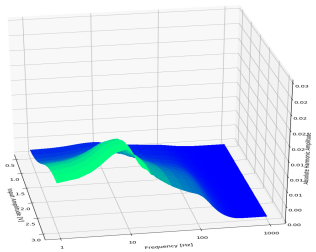
(c) Fondamentale relative



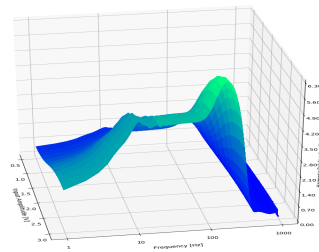
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative



(f) Harmonique d'ordre 3 absolue



(g) Harmonique d'ordre 3 relative

## Annexe D : Tracés des figures d'amplitude d'harmonique et THD expérimentales sur le haut-parleur F

Figure 6.9: Réponse du haut-parleur F en courant : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$

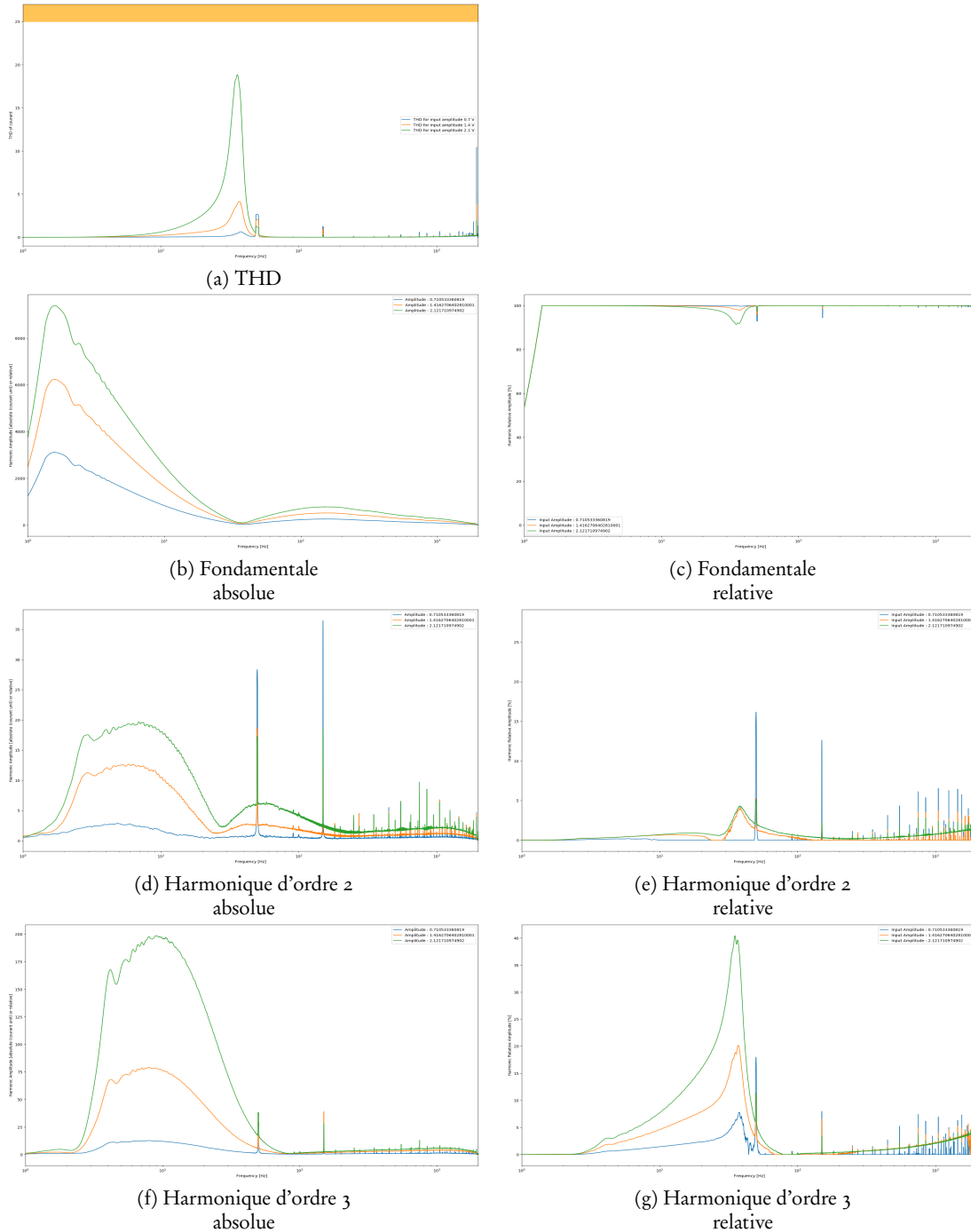
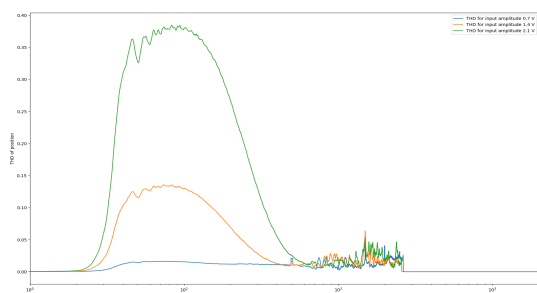
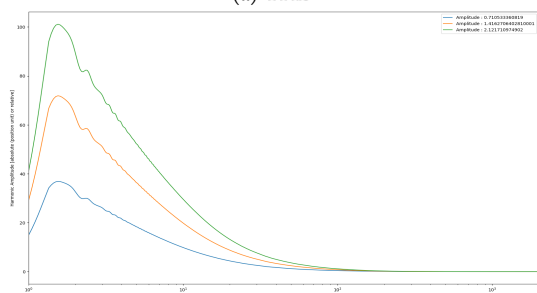


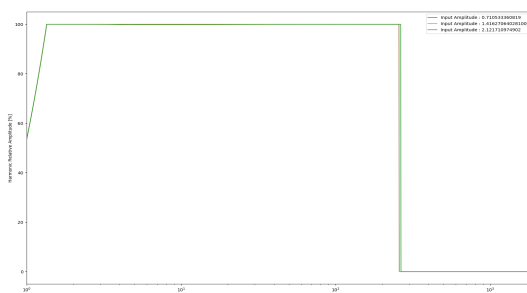
Figure 6.10: Réponse du haut-parleur F en position : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$   
 Note : on a coupé le calcul des amplitudes relatives au-dessus de  $100Hz$ , le rapport signal-sur-bruit devenant trop faible pour obtenir un résultat significatif



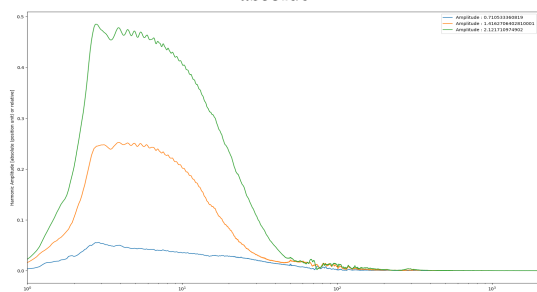
(a) THD



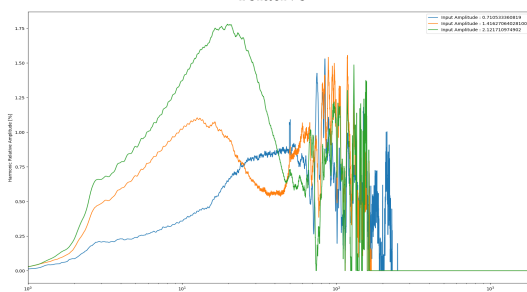
(b) Fondamentale absolue



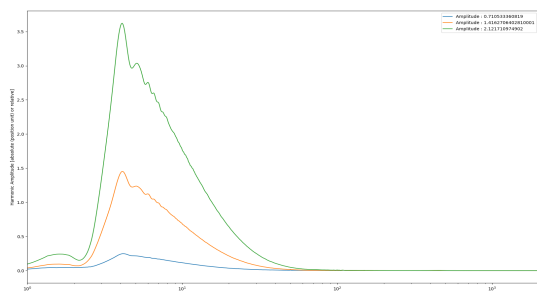
(c) Fondamentale relative



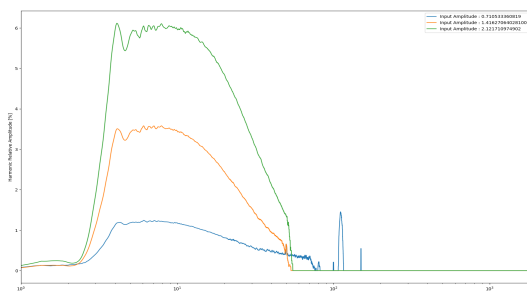
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative

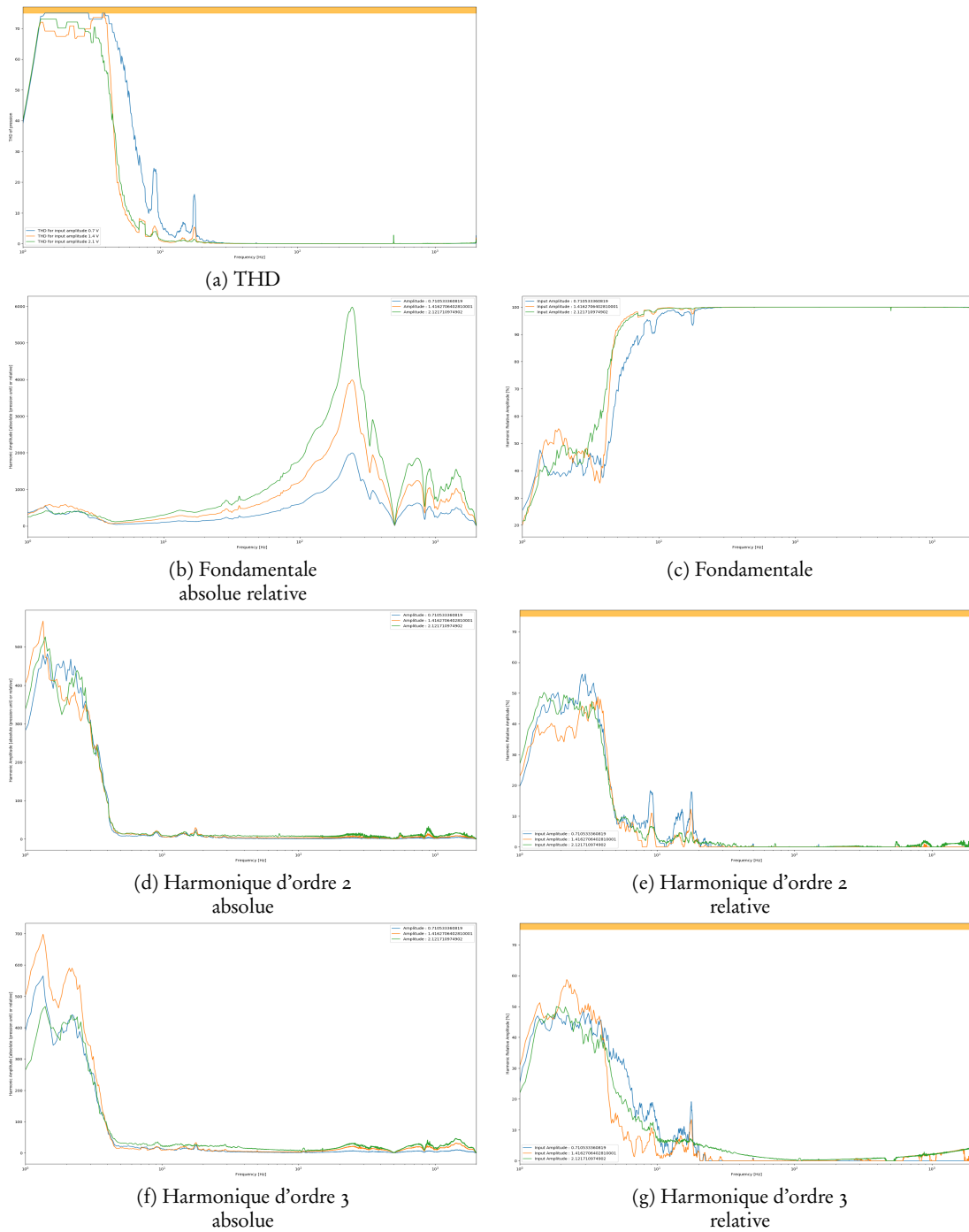


(f) Harmonique d'ordre 3 absolue



(g) Harmonique d'ordre 3 relative

Figure 6.11: Réponse du haut-parleur F en pression : 3 premières harmoniques et THD pour un un sweep balayant  $[1, 2000] Hz$   
*Note : on a borné les amplitudes relatives et le THD en-dessous de 10 Hz (bande orange) à 60 % pour des soucis de visualisation*



## Annexe E : Tracés des figures d'amplitude d'harmonique et THD expérimentales sur le haut-parleur V

Figure 6.12: Réponse du haut-parleur V en courant : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$

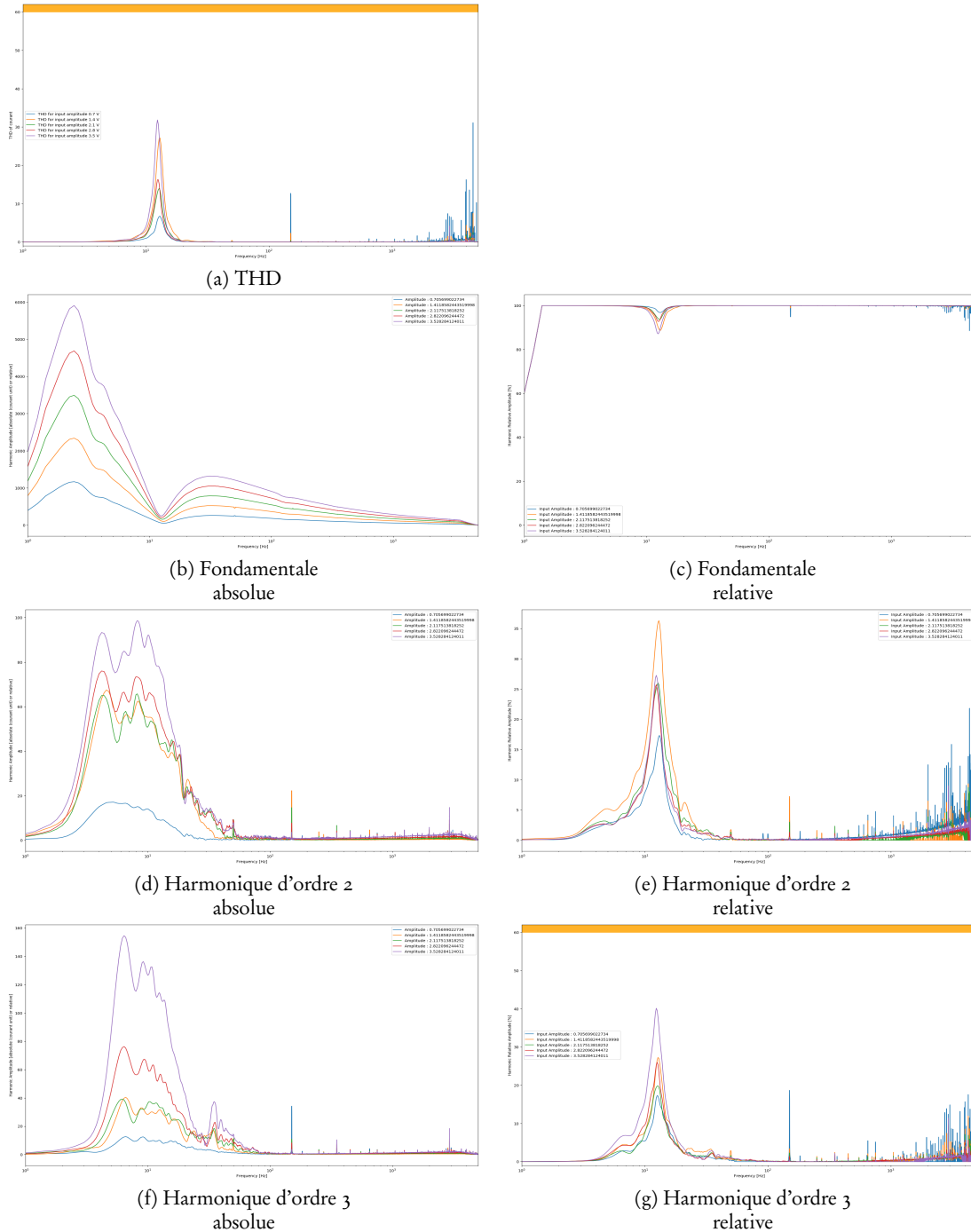
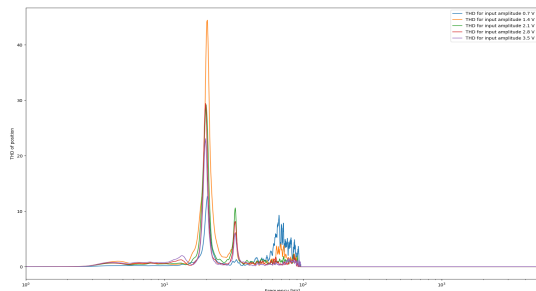
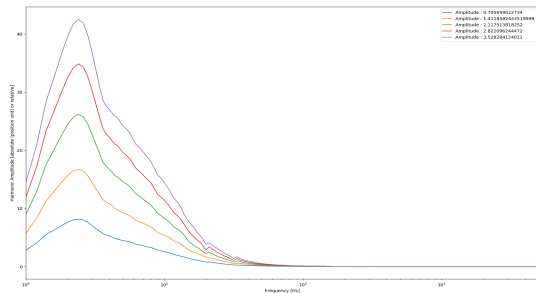


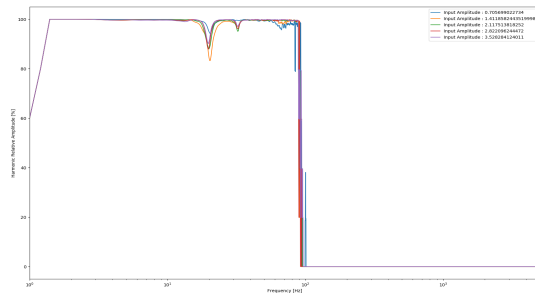
Figure 6.13: Réponse du haut-parleur V en position : 3 premières harmoniques et THD pour un sweep balayant  $[1, 2000]Hz$   
*Note : on a coupé le calcul des amplitudes relatives au-dessus de  $100Hz$ , le rapport signal-sur-bruit devenant trop faible pour obtenir un résultat significatif*



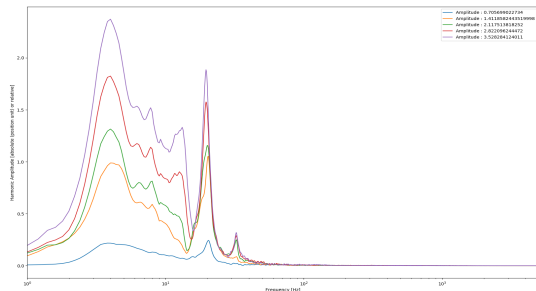
(a) THD



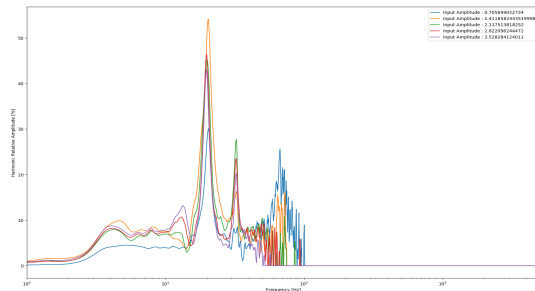
(b) Fondamentale absolue



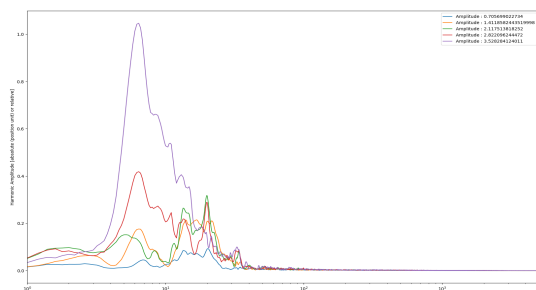
(c) Fondamentale relative



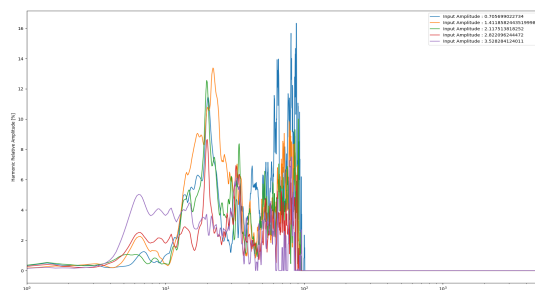
(d) Harmonique d'ordre 2 absolue



(e) Harmonique d'ordre 2 relative



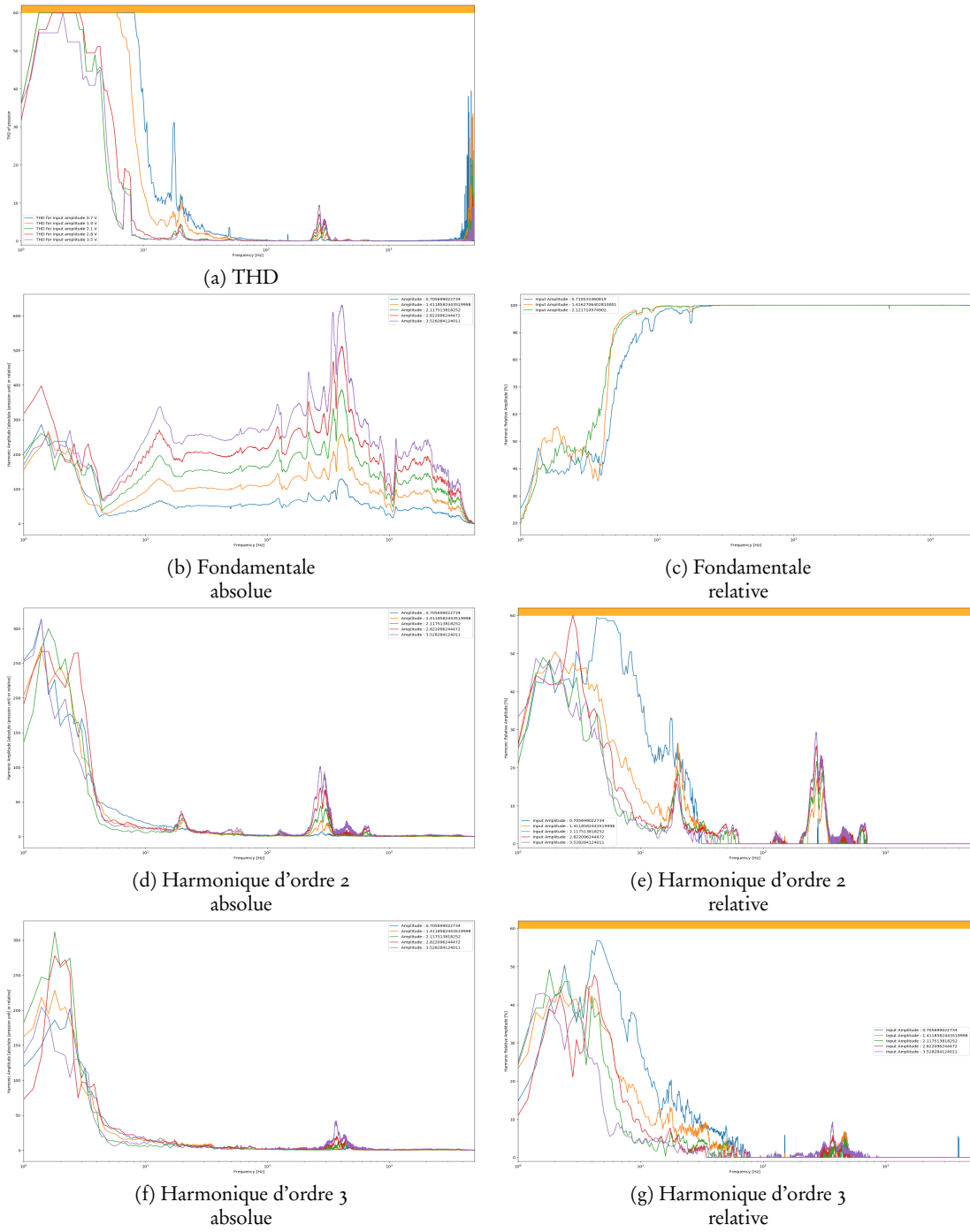
(f) Harmonique d'ordre 3 absolue



(g) Harmonique d'ordre 3 relative

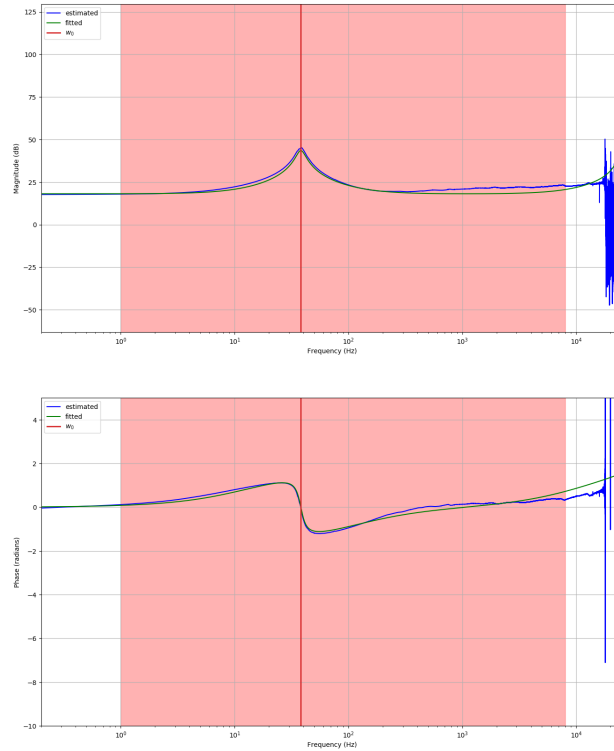


Figure 6.14: Réponse du haut-parleur V en pression : 3 premières harmoniques et THD pour un un sweep balayant  $[1, 2000] Hz$   
*Note : on a borné les amplitudes relatives et le THD en-dessous de 10 Hz (bande orange) à 60 % pour des soucis de visualisation*

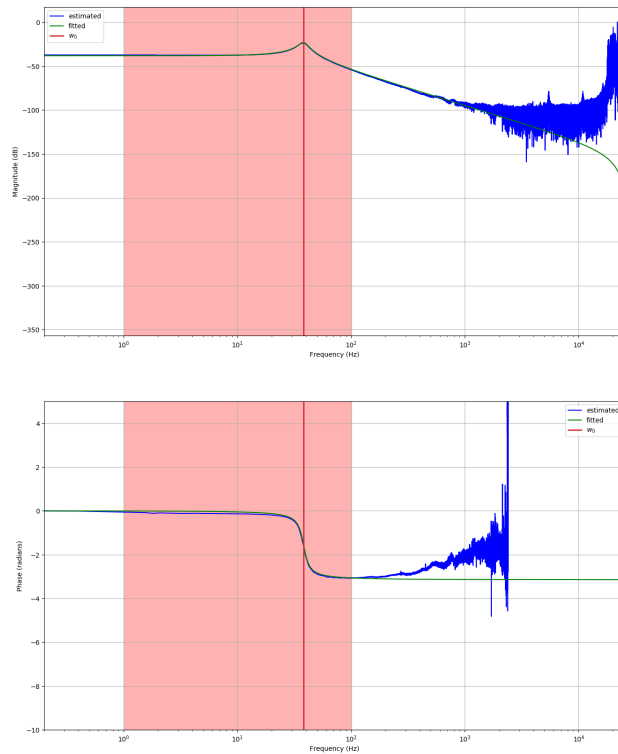


## Annexe F : Fonctions de transfert expérimentale et paramétriques utilisées pour l'identification de paramètres de Thiele-Small sur réponse linéarisée

Note : La fenêtre rouge est la plage de fréquences utilisée pour l'estimation

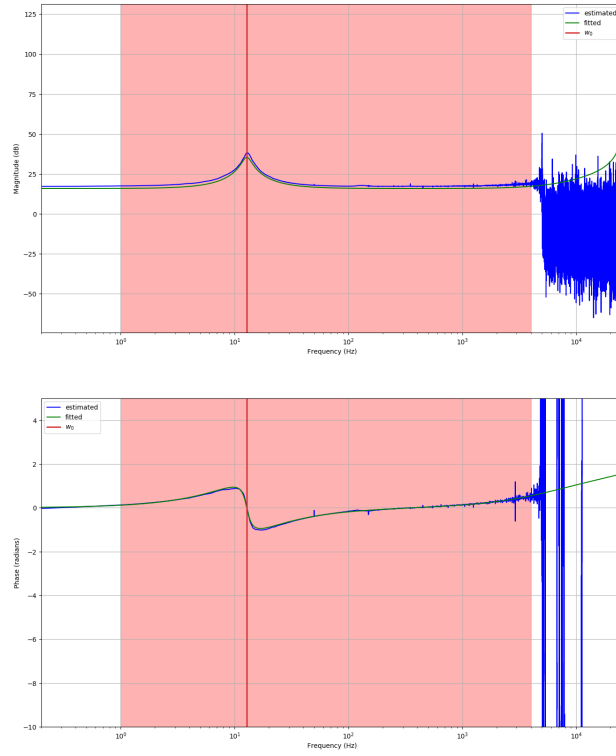


(a) Haut-parleur F: Résultat de curve-fitting de la fonction de transfert (Admittance électrique)  $H_{ii} = \frac{U}{T}$  du système linéarisé

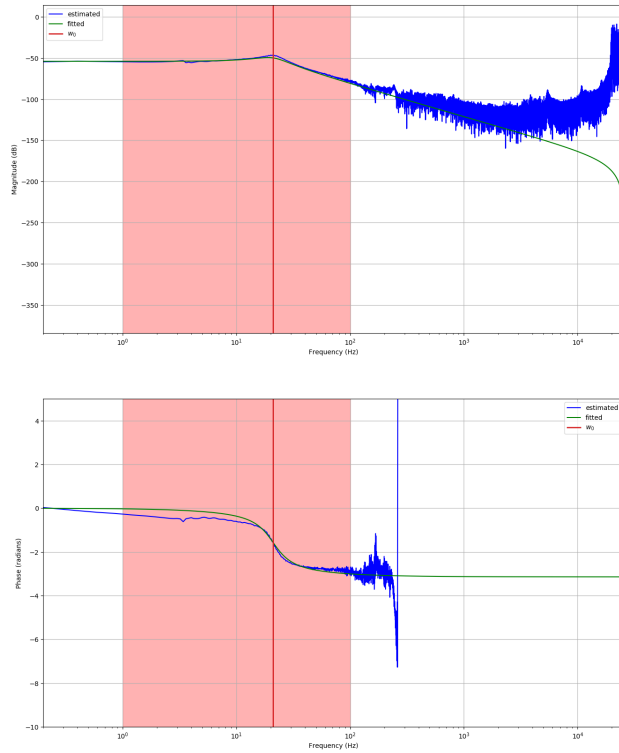


(b) Haut-parleur F: Résultat de curve-fitting de la fonction de transfert  $H_{xi} = \frac{X}{T}$  du système linéarisé

Figure 6.15: Curve-fitting des fonctions de transfert du haut-parleur F linéarisé



(a) Haut-parleur V: Résultat de curve-fitting de la fonction de transfert (Admittance électrique)  $H_{ui} = \frac{U}{I}$  du système linéarisé



(b) Haut-parleur V: Résultat de curve-fitting de la fonction de transfert  $H_{xi} = \frac{X}{I}$  du système linéarisé

Figure 6.16: Curve-fitting des fonctions de transfert du haut-parleur V linéarisé

## Annexe G : Fiche constructeur du haut-parleur F



### Features

- HP (Hyperbolic Paraboloid) shell diaphragm
- 'ES cone' paper made of banana plant's fiber
- UDR tangential edge / damper
- $\varnothing$  156mm large ferrite magnet

### Specifications

#### &

#### Thiele/Small Parameters

Size	: 200 mm / 8 in
Voice Coil Diameter	: 35 mm / 1.3 in
Cast / Stamped	: Cast
Impedance	: 8 $\Omega$
Reproduction Frequency Response	:fs - 14 kHz
Sound Pressure Level	: 97 dB/W(m)
Rated Input	: 40 W
Music Power	: 120W
Magnet Material	: Ferrite
Magnet Weight	
(main)	: 1,408.7 g / 3.106 lb
(cancel)	: n/a g / n/a lb
Net Weight	: 4,800 g / 10.58 lb

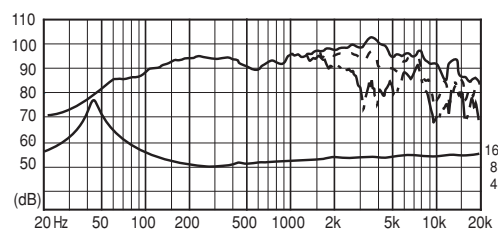
a :	80 mm
D :	144 mm
Sd :	0.0201 m <sup>2</sup>
Zn :	8 $\Omega$
Fs :	42 Hz
Re :	6.4 $\Omega$
Le :	0.0517 mH
Qms :	6.191
Qes :	0.19
Qts :	0.18
Mms :	13.3 g
BL :	10.8 Telsa/m
Vas :	60.1 L
Xmax :	1.25 mm
Eff/ $\eta$ 0 :	2.278 %
Cms :	1.069 mm/N
EBP :	221.05

### FULL RANGE SPEAKER UNIT

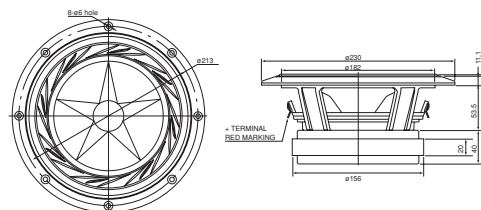
## FE208E $\Sigma$



### Frequency Response / Impedance

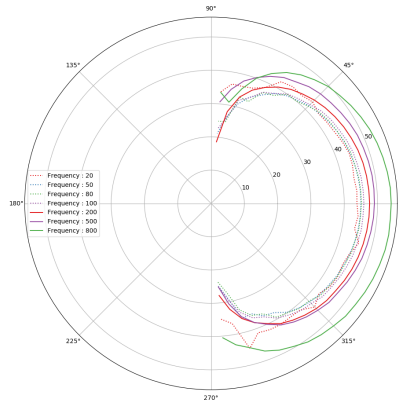


### Dimensions & Mounting Information

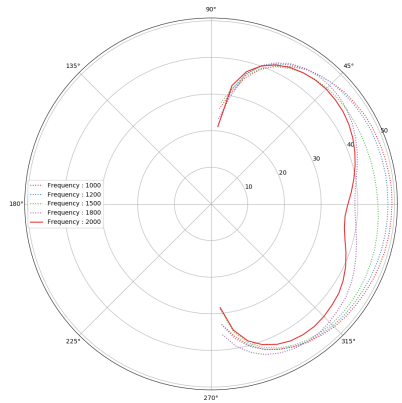


Overall Diameter	: 230 mm / 9 in
Baffle Hole Diameter	: 185 mm / 7 in
Depth	: 93.5 mm / 4 in

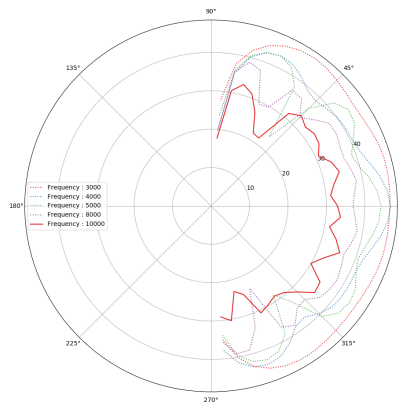
## Annexe H : Directivité et fonctions de transfert du haut-parleur V



(a) Amplitude de la fonction de transfert  $\frac{Pression}{Tension}$  de V en fonction de la direction pour les basses fréquences [100-800Hz]



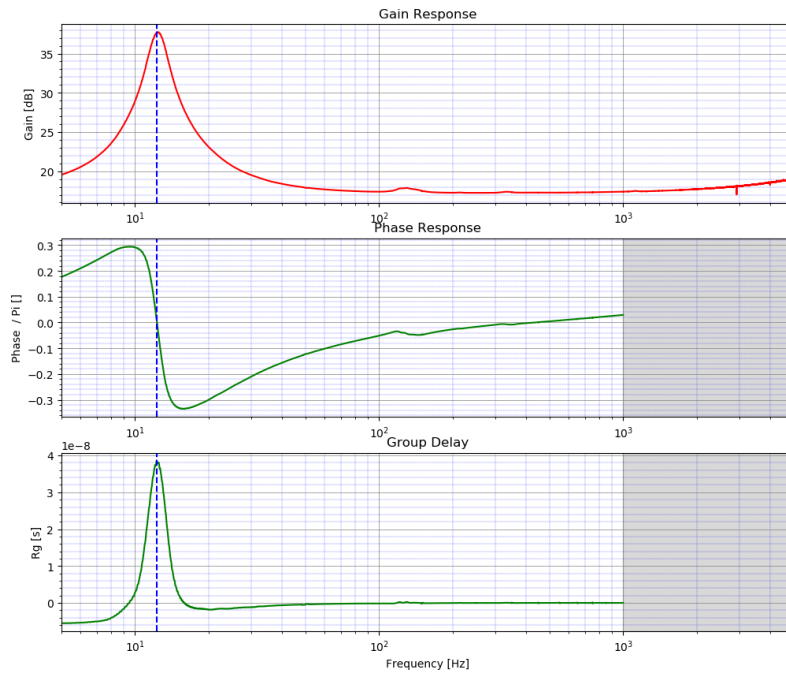
(b) Amplitude de la fonction de transfert  $\frac{Pression}{Tension}$  de V en fonction de la direction pour les moyennes fréquences [1000-2000Hz]



(c) Amplitude de la fonction de transfert  $\frac{Pression}{Tension}$  de V en fonction de la direction pour les hautes fréquences [3000-10000Hz]

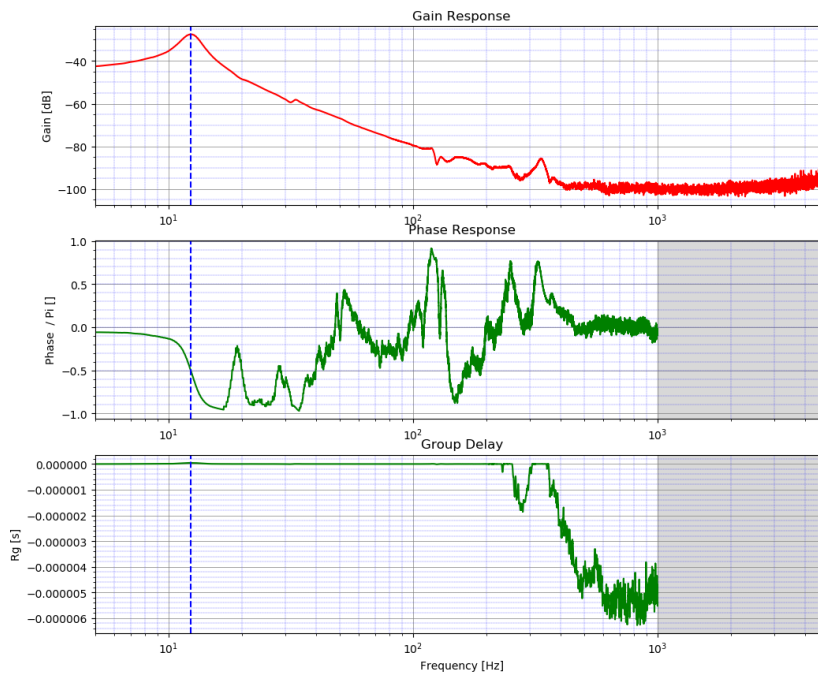
Figure 6.17: Figures de directivité du rayonnement acoustique de V. Mesures réalisées à l'aide d'une moyenne sur 3 sweeps sur [10-22000Hz] pour une direction incrémentée de  $\pm 5^\circ$

Courant vers Tension



(a) Amplitude, Phase et Retard de groupe de la fonction de transfert  $\frac{Intensite}{Tension}$  de V

Courant vers Position



(b) Amplitude, Phase et Retard de groupe de la fonction de transfert  $\frac{Position}{Intensite}$  de V

Figure 6.18: Tracé des fonctions de transfert caractéristiques du haut-parleur V. Mesures réalisées à l'aide d'un moyenne sur 3 sweeps sur [5-5000] Hz